М. ГОТО, Ф. ГРОССХАНС

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics
Volume 38

SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS

MORIKUNI GOTO

Department of Mathematics
University of Pennsylvania
Philadelphia, Pennsylvania

FRANK D. GROSSHANS

Department of Mathematical Sciences
West Chester State College
West Chester, Pennsylvania

MARCEL DEKKER, INC.

New York and Basel

1978

М. ГОТО, Ф. ГРОССХАНС

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Перевод с английского

А. И. Логинова и В. С. Шульмана

под редакцией

Д. П. Желобенко

«МИР»
Москва
1981

УДК 512 ; 519.46

Монография учебного характера по классической теории полупростых алгебр Ли; написана американскими математиками. Для чтения книги достаточно знания основ линейной алгебры и анализа. Материал тщательно отобран; наряду с классическими результатами включены новые, известные лишь по журнальным публикациям.

Книга представляет интерес для математиков различных специальностей, физиков-теоретиков, студентов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

1702030000

Г $\frac{20203-003}{041(01)-81}$ 03—81, ч. 1

Морикуни Гото

Фрэнк Д. Гроссханс

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Научный редактор В. И. Авербух. Млад. научн. ред. Э. Г. Иванова.
Художник В. Н. Тикунов. Художественный редактор В. И. Шаповалов.
Технический редактор И. Г. Кузнецова. Корректор М. А. Смирнов.

ИБ № 2511

Сдано в набор 25.02.81. Подписано к печати 23.09.81. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем бум. л. 10,50. Усл. кр.-отт. 21,00. Усл. печ. л. 21,00. Уч.-изд. л. 17,99.
Изд. № 1/0954. Тираж 6000 экз. Зак. 542. Цена 2 р. 50 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Эта книга посвящена классическому разделу современной математики, связанному с именами В. Киллинга, Э. Картана, Г. Вейля и выкристаллизовавшемуся к середине нашего столетия. Основным достижением теории является полная классификация простых алгебр Ли над полями комплексных и вещественных чисел, посредством которой достигается также классификация связных простых вещественных групп Ли и связных симметрических римановых пространств (Э. Картан).

Предлагаемая вниманию читателя книга отличается значительными методическими достоинствами. Это одновременно элементарный учебник и специальная монография, содержащая изложение ряда вопросов, освещавшихся до сих пор только в журнальной литературе. Сюда относятся: когомологии алгебр Ли, аффинные группы Вейля, автоморфизмы простых алгебр Ли, классификация максимальных подалгебр максимального ранга в компактных простых алгебрах Ли, детальная классификация простых вещественных алгебр Ли. Ограничение классическими полями комплексных и вещественных чисел позволило сделать изложение более прозрачным и завершенным и включить соответствующий материал по связи с линейными группами Ли.

Можно надеяться, что книга окажется полезной широкому кругу читателей, интересующихся как основами теории, так и ее специальными разделами и многочисленными приложениями.

Д. Желобенко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги — дать изложение той части теории алгебр Ли, которая наиболее тесно связана с теорией групп Ли. Изучение алгебр Ли было начато С. Ли именно в связи с группами Ли, и с тех пор эти две области продолжают влиять друг на друга. Сравнительно недавно на развитие теории алгебр Ли стала оказывать влияние теория алгебраических групп; в главе 6 настоящей книги вводятся в рассмотрение как группы Ли, так и алгебраические группы, и они играют существенную роль в последующих главах. Однако основное внимание в книге уделено алгебрам Ли, и при изложении теоретико-групповой части материала мы ограничились только самыми важными моментами.

В главах 1—4 развивается общая теория алгебр Ли, включая классификацию комплексных полупростых алгебр Ли, существование точных представлений и разложения Леви, Картана и Ивасавы. Наш подход алгебраичен, и от читателя требуется лишь хорошее знание линейной алгебры. В главе 5 строится аппарат дискретных групп, связанных с системами корней.

В главе 6 на сцене впервые появляется теория групп, а именно дается достаточно полное и независимое введение в теорию групп Ли. Нашей целью в этой главе является глобальная реализация результатов глав 1—4, т. е. их интерпретация в виде результатов о группах Ли. В главе 7 описываются неприводимые комплексные и вещественные представления полупростых алгебр Ли. Наконец, глава 8 содержит полную классификацию вещественных простых алгебр Ли.

В книгу включены упражнения различной степени трудности. Для экономии места результаты упражнений иногда используются при доказательстве теорем.

Приводимая в конце книги библиография предназначена служить путеводителем по имеющейся литературе, но никоим образом не претендует на полноту. При ссылках на литературу в тексте используется только фамилия автора [1].

Мы глубоко признательны целому ряду лиц за большой труд, в результате которого эта книга смогла выйти в свет. В особенности нам хочется поблагодарить г-жу Фон Лай, отпечатавшую рукопись, г-жу Энну Мэй Брэнтон, подготовившую рукопись к набору, и д-ров Хэн-Луна Лая и Ричарда Брэнтона, прочитавших корректуру и сделавших много полезных замечаний.

Морикуни Гото
Фрэнк Д. Гроссханс

---

[1] В квадратных скобках. Соответственно в библиографии отмечены те работы, на которые имеются ссылки в тексте.—*Прим. ред.*

Глава **1**

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБР ЛИ

1.1. Основные понятия и определения

Пусть P — поле. Под *векторным пространством* над P мы будем, если не оговорено противное, подразумевать векторное пространство *конечной размерности*. Если A — векторное пространство над P, то всякое билинейное отображение f: $A \times A \to A$ называется *умножением* в A, а A — *алгеброй* относительно f. Как обычно, для X и Y из A вместо $f(X, Y)$ мы будем писать просто XY.

Пусть A — некоторая фиксированная алгебра и $E_1, \ldots, E_n$ — какой-нибудь ее базис. Элементы $c_{ijk} \in P$, определяемые равенствами

$$E_iE_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}E_k,$$

называются *структурными константами* алгебры A относительно базиса $E_1, \ldots, E_n$. Умножение в A полностью задается этими константами.

Алгебра A называется *ассоциативной*, если $X(YZ) = (XY)Z$ для всех X, Y и Z из A. Алгебра A называется *алгеброй Ли*, если выполняются следующие два условия:

$$XX = 0 \qquad \text{(\textit{антикоммутативность})},$$

$$X(YZ) + Y(ZX) + Z(XY) = 0 \qquad \text{(\textit{тождество Якоби})}.$$

Из условия антикоммутативности следует, что

$$0 = (X + Y)(X + Y) = XX + XY + YX + YY = XY + YX$$

и, значит, $XY = -YX$. Обратно, если $XY = -YX$ для всех X, Y из A, то $XX = 0$, при условии что $\operatorname{char} P$ (характеристика поля P) $\neq 2$.

Пусть снова A — произвольная алгебра. Векторное подпространство B в A называется *подалгеброй* в A, если B является алгеброй относительно определенного в A умножения, т. е. если $XY \in B$ для всех $X, Y \in B$.

Для любых двух подмножеств B и C алгебры A положим

$$BC = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_iX_iX_i \colon k \text{ — произвольное натуральное число, } X_i \in B, Y_i \in C, a_i \in P \right\}.$$

Подалгебра B называется *идеалом* алгебры A, если $AB \subset B$ и $BA \subset B$. В случае когда A — алгебра Ли, достаточно выполнения одного из этих условий (ввиду антикоммутативности).

Пусть даны алгебра A и ее идеал B. Факторпространство A/B (в смысле векторных пространств) является алгеброй относительно (корректно определенного, как нетрудно проверить) умножения

$$(X+B)(Y+B) = XY + B \quad \text{для } X,\ Y \in A.$$

Эта алгебра называется *факторалгеброй* A по B и обозначается также через A/B.

Пусть A и A' — алгебры над P. Линейное отображение g: $A \to A'$ называется *гомоморфизмом*, если $g(XY) = g(X)g(Y)$ для всех X, $Y \in A$. Множество $\{X \in A: g(X) = 0\}$ называется *ядром* гомоморфизма g и обозначается через $\ker g$; очевидно, что это — идеал в A. Всякий взаимно-однозначный гомоморфизм A на A' называется *изоморфизмом*. Если существует изоморфизм A на A', то говорят, что A и A' изоморфны, и пишут $A \cong A'$.

Стандартные теоремы о гомоморфизмах справедливы и для алгебр. Прежде всего, если g — гомоморфизм A на A', то $A/\ker g \cong A'$. Далее, если B — идеал, а C — произвольная подалгебра в A, то $B + C = \{X + Y: X \in B,\ Y \in C\}$ — подалгебра в A, B — идеал в $B + C$, $B \cap C$ — идеал в C и $(B + C)/B \cong C/B \cap C$.

Изоморфизм алгебры на себя называется ее *автоморфизмом*. Множество всех автоморфизмов алгебры A образует группу, которая обозначается $\operatorname{Aut}(A)$ и называется *группой автоморфизмов* алгебры A.

Приведем примеры алгебр Ли. Ниже мы обозначаем через $\overline{P}$ алгебраическое замыкание поля P. Отметим, что если $\operatorname{char} P = 0$, то его простое подполе можно отождествить с полем рациональных чисел Q.

1. Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра. Вводя новое (*скобочное*) умножение на A по формуле $[X, Y] = XY - YX$, мы превращаем векторное пространство A в алгебру Ли. Исходя из этого примера, мы в дальнейшем будем обозначать умножение в алгебрах Ли через $[X, Y]$. В этой записи условие антикоммутативности и тождество Якоби принимают соответственно вид

$$[X, X] = 0 \text{ и } [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

2. Пусть V — векторное пространство над P и $e_1, \ldots, e_n$ — его базис. Обозначим через $\mathfrak{gl}(V)$ ассоциативную алгебру всех эндоморфизмов (линейных отображений в себя) пространства V.

Для всякого s из $\mathfrak{gl}(V)$ положим

$$se_j = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} e_k \quad (s_{kj} \in P),\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е.

$$(se_1, \ldots, se_n) = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} s_{11} \ldots s_{1n} \\ . \ . \ . \ . \\ s_{n1} \ldots s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{gl}(n, P)$ обозначает ассоциативную алгебру всех матриц размера $n \times n$ над P. Тогда отображение

$$\mathfrak{gl}(V) \ni s \mapsto S = \begin{pmatrix} s_{11} \ldots s_{1n} \\ . \ . \ . \ . \\ s_{n1} \ldots s_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, P)$$

является изоморфизмом алгебр. Таким образом, выбирая базис в V, мы можем отождествлять алгебры $\mathfrak{gl}(n, P)$ и $\mathfrak{gl}(V)$.

Согласно примеру 1, алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ (и $\mathfrak{gl}(n, P)$) суть алгебры Ли относительно скобочного умножения. Мы будем иногда использовать символ $\mathrm{End}\,(V)$ для обозначения *ассоциативной алгебры* $\mathfrak{gl}(V)$.

3. Важную роль в теории алгебр Ли играет следующий идеал алгебры $\mathfrak{gl}(n, P)$:

$$\mathfrak{sl}(n, P) = \{S \in \mathfrak{gl}(n, P) \colon \mathrm{tr}\, S = 0\},$$

где $\mathrm{tr}\,(s_{ij}) = s_{11} + s_{22} + \ldots + s_{nn}$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, P)$ называется *специальной линейной алгеброй Ли* [1].

4. *Ортогональная алгебра Ли*:

$$\mathfrak{o}(n, P) = \{S \in \mathfrak{gl}(n, P) \colon S + {}^tS = 0\},$$

где ${}^tS$ обозначает матрицу, транспонированную к S.

5. Пусть I_m — единичная $m \times m$-матрица и

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра

$$\mathfrak{sp}(m, P) = \{S \in \mathfrak{gl}(2m, P) \colon {}^tSJ + JS = 0\}$$

называется *симплектической алгеброй Ли*.

6. Пусть A и B — две алгебры Ли. Векторное пространство $A \oplus B = \{(X, Y);\ X \in A,\ Y \in B\}$ является алгеброй Ли относительно умножения

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]).$$

Эту алгебру Ли $A \oplus B$ называют *прямой суммой* алгебр Ли A и B.

[1] Алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$ (или $\mathfrak{gl}(n, P)$) называют обычно *полной линейной алгеброй Ли*. — *Прим. ред.*

Простой алгеброй называется алгебра A, имеющая лишь два идеала, $\{0\}$ и A, и удовлетворяющая условию $A^2 = AA \neq 0$. Позднее мы покажем, что если char $P = 0$, то все алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, P)$ $(n \geqslant 2)$, $\mathfrak{o}(n, P)$ $(n = 3$ или $n \geqslant 5)$ и $\mathfrak{sp}(m, P)$ $(m \geqslant 1)$ просты. Алгебры из этих бесконечных классов простых алгебр Ли называются *классическими алгебрами Ли*.

Упражнение 1. Пусть A — алгебра, обладающая таким базисом $\{E_1, \ldots, E_n\}$, для которого $E_iE_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}E_k$. Показать, что A является алгеброй Ли в том и только том случае, когда справедливы следующие равенства:

$$b_{ijk} + c_{jik} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n} (c_{ist}c_{jks} + c_{jst}c_{kis} + c_{kst}b_{ijs}) = 0$$

для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Упражнение 2. Найти размерности алгебры $\mathfrak{gl}$ (n, P) и классических алгебр Ли.

Упражнение 3. *Дифференцированием алгебры* A называется всякое линейное отображение δ: $A \to A$, такое что $\delta(ab) = (\delta a)\, b + a\,(\delta b)$ для всех $a, b \in A$. Доказать, что множество всех дифференцирований алгебры A является (лиевой) подалгеброй в $\mathfrak{gl}(A)$.

1.2. Представления алгебр Ли

Пусть V — векторное пространство над полем $\tilde{P}$ и L — алгебра Ли над некоторым подполем P поля $\tilde{P}$. Всякий гомоморфизм f из L в алгебру $\mathfrak{gl}(V)$, рассматриваемую как алгебра Ли над P, называется *представлением алгебры Ли* L.

Таким образом, представление алгебры Ли L — это отображение f: $L \to \mathfrak{gl}$ (V), удовлетворяющее следующим условиям:

$$f(aX + bY) = af(X) + bf(Y),$$

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] = f(X)\, f(Y) - f(Y)\, f(X)$$

для всех $X, Y \in L$ и $a, b \in P$. Мы будем иногда обозначать такое представление через (V, f) или просто через f и в случаях, когда это не может привести к недоразумению, писать Xv вместо $f(X)\, v$ (здесь $X \in L$, $v \in V$).

Среди представлений данной алгебры Ли L есть одно особенно важное. Это — естественное действие алгебры L на самой себе, позволяющее переформулировать результаты теории представлений в виде утверждений о структуре алгебры L. Точнее, пусть L — алгебра Ли над полем P. Для каждого элемента $X \in L$ определим эндоморфизм ad $X \in \mathfrak{gl}$ (L) формулой ad $X(Y) = [X, Y]$, $Y \in L$. Так как

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$$

для всех $X, Y, Z \in L$, то

$$\mathrm{ad}([X, Y]) = \mathrm{ad}\, X \cdot \mathrm{ad}\, Y - \mathrm{ad}\, Y \cdot \mathrm{ad}\, X,$$

так что ad — представление алгебры L. Оно называется *присоединенным представлением* алгебры Ли L. Рассмотрим идеал $z(L)$ в L, задаваемый формулой

$$z(L) = \ker(\mathrm{ad}) = \{X \in L\colon [X, Y] = 0 \quad \text{для всех } Y \in L\}.$$

Он называется *центром* алгебры Ли. Присоединенное представление является взаимно-однозначным тогда и только тогда, когда $z(L) = 0$.

(1.2.1) *Пусть* (V, f) — *представление алгебры Ли* L *и* $X \in L$. *Пусть* $L = L(0) \bigoplus L(\alpha) \bigoplus \ldots$ — *разложение пространства* L *на обобщенные собственные подпространства эндоморфизма* $\mathrm{ad}\, X$, *а* $V = V(\lambda) \bigoplus V(\mu) \bigoplus \ldots$ — *разложение* V *на обобщенные собственные подпространства эндоморфизма* $f(X)$. *Тогда*

$$f(L(\alpha))\, V(\lambda) \subset V(\alpha + \lambda).$$

Замечание. Условимся считать $\{0\}$ собственным подпространством, отвечающим тем числам, которые не являются собственными значениями. Например, в (1.2.1) мы имеем $V(\alpha + \lambda) = 0$, если $\alpha + \lambda$ не является собственным значением для $f(X)$.

Доказательство. Для любых $Y \in L$, $v \in V$

$$(f(X) - (\alpha + \lambda))\, f(Y)\, v = f((\mathrm{ad}\, X - \alpha)\, Y)\, v$$
$$+ f(Y)\,(f(X) - \lambda)\, v.$$

Отсюда, используя индукцию по k, можно вывести, что

$$(f(X - (\alpha + \lambda))^k f(Y)\, v = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{k}{i}\right) f((\mathrm{ad} X - \alpha)^{k-i} Y)$$
$$\cdot (f(X) - \lambda)^i v.$$

Если $Y \in L(\alpha)$ и $v \in V(\lambda)$, то для некоторого номера $j > 0$

$$(\mathrm{ad} X - \alpha)^j Y = 0 \quad \text{и} \quad (f(X) - \lambda)^j v = 0.$$

Следовательно,

$$(f(X) - (\alpha + \lambda))^{2j} f(Y)\, v = 0. \ \square$$

(1.2.2) *Пусть* L — *алгебра Ли*, $X \in L$ и $L = L(0) \bigoplus L(\alpha) \bigoplus \ldots$ — *разложение* L *на обобщенные собственные подпространства эндоморфизма* $\mathrm{ad}\, X$. *Тогда*

1) $[L(\alpha), L(\beta)] \subset L(\alpha + \beta)$;

2) $L(0)$ *есть подалгебра в* L, *содержащая* X.

Доказательство. Взяв в (1.2.1) в качестве представления (V, f) представление (L, ad), получим утверждение 1). Для доказательства утверждения 2) заметим, что $X \in L(0)$, так как $[X, X] = 0$. □

Пусть теперь V — векторное пространство над P и Σ — некоторое подмножество в $\mathfrak{gl}(V)$. Если единственными подпространствами в V, инвариантными относительно всех элементов Σ, являются 0 и V, то Σ называется *неприводимым*. В противном случае Σ называется *приводимым*. Если для каждого Σ-инвариантного подпространства W в V существует такое Σ-инвариантное подпространство W' в V, что $V = W \oplus W'$, то Σ называется *вполне приводимым*. Представление (V, f) алгебры Ли L называется *неприводимым*, *приводимым* или *вполне приводимым*, если соответствующим свойством обладает $f(L)$.

Два представления (V_1, f_1) и (V_2, f_2) алгебры Ли L называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм φ векторного пространства V_1 на V_2, что

$$\varphi f_1(X) v = f_2(X) \varphi v, \text{ т. е. } \varphi f_1(X) \varphi^{-1} = f_2(X)$$

для всех $X \in L$ и $v \in V_1$. Очевидно, что это действительно отношение эквивалентности.

Пусть теперь (V, f) — некоторое представление алгебры Ли L, и пусть W — собственное $f(L)$-инвариантное подпространство в V, имеющее максимальную возможную размерность. Представление (V, f) порождает неприводимое представление алгебры L в пространстве V/W. В самом деле, для $X \in L$ и $v \in V$ положим

$$f_{V/W}(X)(v + W) = f(X) v + W.$$

Таким путем можно явно построить композиционный ряд для V, т. е. последовательность $0 = V_0 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_k = V$, состоящую из $f(L)$-инвариантных подпространств в V, такую что $f(L)$ действует неприводимо в каждом из факторпространств V_i/V_{i-1}. Можно доказать (см. упр. 1 ниже), что существует представление f' алгебры L в прямой сумме

$$V_1/V_0 \oplus \ldots \oplus V_k/V_{k-1} = V',$$

относительно которого инвариантны все подпространства V_i/V_{i-1} и сужения которого на эти подпространства совпадают с только что построенными представлениями. Согласно теореме Жордана—Гёльдера, это представление (V', f') определяется алгеброй L и представлением (V, f) однозначно с точностью до эквивалентности. Оно называется *вполне приводимым представлением, ассоциированным с* (V, f).

Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V таким образом, чтобы для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$ векторы $e_1, \ldots, e_{l_j}$ образовывали базис

пространства V_j ($l_1 < l_2 < \ldots < l_k$). Тогда для $X \in L$ эндоморфизму $f(X)$ отвечает в этом базисе матрица

$$\begin{pmatrix} \overbrace{F_1(X)}^{l_1} & \overbrace{}^{l_2-l_1} & & \overbrace{ * }^{l_k-l_{k-1}} \\ & F_2(X) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_k(X) \end{pmatrix},$$

причем диагональная часть

$$F'(X) = \begin{pmatrix} F_1(X) & & & 0 \\ & F_2(X) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_k(X) \end{pmatrix}$$

этой матрицы соответствует f'. Следовательно, мы можем отождествить V' с V, т. е. рассматривать f' как представление в пространстве V.

(1.2.3) (Лемма Шура) *Пусть V — векторное пространство над $P = \overline{P}$ и Σ — неприводимое подмножество в $\mathfrak{gl}(V)$. Если эндоморфизм $z \in \mathfrak{gl}(V)$ удовлетворяет условию $zs = sz$ для всех $s \in \Sigma$, то существует такой элемент $a \in P$, что $z = a1$.*

Доказательство. Пусть a — какое-нибудь собственное значение преобразования z. Так как $\det(z - a1) = 0$, то подпространство $U = (z - a1) V \neq V$. С другой стороны, если $s \in \Sigma$, то

$$sU = s(z - a)V = (z - a)sV \subset (z - a)V = U.$$

В силу неприводимости Σ, $U = 0$, т. е. $z = a1$. □

Упражнение 1. Пусть L — алгебра Ли, V_1 и V_2 — векторные пространства над P и (V_1, f_1), (V_2, f_2) — представления L. Для $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ и $X \in L$ положим $f(X)(v_1, v_2) = (f_1(X)v_1, f_2(X)v_2)$. Показать, что $(V_1 \oplus V_2, f)$ — представление алгебры L. Оно называется *суммой представлений* (V_1, f_1) и (V_2, f_2).

Упражнение 2. Пусть (V_1, f_1), (V_2, f_2) — представления алгебры Ли L и $\mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ — векторное пространство всех линейных отображений из V_2 в V_1. Определим отображение $f\colon L \to \mathfrak{gl}(\mathrm{Hom}(V_2, V_1))$ формулой

$$f(X)u = f_1(X)u - uf_2(X)$$

для всех $X \in L$ и $u \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$. Показать, что f — представление алгебры L.

Упражнение 3. Пусть (P^n, f) — представление алгебры Ли L. Показать, что $f^*(X) = -{}^t f(X)$ — также представление алгебры L.

Упражнение 4. Пусть L — алгебра Ли и $X \in L$. Показать, что $\mathrm{ad}\, X$ — дифференцирование алгебры L. [*Указание*: воспользуйтесь тождеством Якоби.]

Упражнение 5. Пусть (V, f) — представление алгебры Ли и I — идеал в L. Показать, что $f(I)V$ есть L-инвариантное подпространство в V. [*Указание*: $f(X)f(Y) = [f(X), f(Y)] + f(Y)f(X)$.]

Упражнение 6. Пусть (V_1, f_1) и (V_2, f_2) — представления алгебры Ли L. Для $X \in L$ определим $f(X) \in \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ соотношением

$$f(X)(v_1 \otimes v_2) = f_1(X) v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes f_2(X) v_2$$

$(v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2)$. Показать, что $(V_1 \otimes V_2, f)$ есть представление алгебры L. Оно называется *произведением представлений* (V_1, f_1) и (V_2, f_2).

Упражнение 7. Пусть (V_1, f_1) и (V_2, f_2) — представления алгебры Ли L и $X \in L$. Предположим, что $V_1 = \bigoplus_\alpha V_1(\alpha)$ и $V_2 = \bigoplus_\beta V_2(\beta)$ — разложения пространств V_1 и V_2 на обобщенные собственные подпространства эндоморфизмов $f_1(X)$ и $f_2(X)$ соответственно. Пусть $(V_1 \otimes V_2, f)$ — произведение представлений (V_1, f_1) и (V_2, f_2) (упр. 6). Показать, что

$$V_1 \otimes V_2 = \bigoplus_\gamma \Big(\bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V_1(\alpha) \otimes V_2(\beta) \Big)$$

есть разложение пространства $V_1 \otimes V_2$ на обобщенные собственные подпространства эндоморфизма $f(X)$. [*Указание*: покажите, что

$$(f(X) - (\alpha + \beta))^k \ (v_1 \otimes v_2 = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (f_1(X) - \alpha)^{k-i} v_1 \otimes (f_2(X) - \beta)^i v_2.]$$

Упражнение 8. Пусть $\sum$ — неприводимое подмножество в $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ и z — симметричная матрица из $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$. Если $zs = sz$ для всех $s \in \sum$, то $z = a1$ при некотором $a \in \mathbb{R}$. [*Указание*. Это следует из вещественности собственных значений матрицы z. Фактически достаточно одного вещественного собственного значения.]

1.3. Нильпотентные алгебры Ли

(1.3.1) *Пусть L — алгебра Ли и A, B — идеалы в L. Тогда $[A, B]$ — также идеал в L.*

Доказательство. Всякий элемент из $[A, B]$ можно записать в виде $\sum_{i=1}^k [X_i, Y_i]$, где $X_i \in A$, $Y_i \in B$. Если Z — произвольный элемент из L, то, в силу тождества Якоби,

$$(1)\quad [Z, (\sum [X_i Y_i])] = \sum [[Z, X_i], Y_i] + \sum [X_i, [Z, Y_i]].$$

Так как A и B — идеалы, то $[Z, X_i] \in A$ и $[Z, Y_i] \in B$. Следовательно, правая часть равенства (1) представляет собой элемент из $[A, B]$. $\square$

Используя (1.3.1), определим по индукции последовательность L^k идеалов в L:

$$L^1 = L,\ L^2 = [L, L],\ \ldots,\ L^k = [L^{k-1}, L].$$

Эта последовательность $L^1 \supset L^2 \supset L^3 \ldots$ называется *убывающей центральной последовательностью* алгебры Ли L. Если $L^k = 0$ при некотором k, то алгебру L называют *нильпотентной*. В том

частном случае, когда $L^2 = 0$, алгебра L называется *абелевой*. Очевидно, что L абелева тогда и только тогда, когда $z(L) = L$. Далее, если $L^k = 0$, то $L^{k-1} \subset z(L)$, так что *всякая ненулевая нильпотентная алгебра имеет ненулевой центр*.

Абелевы алгебры Ли легко строить и неинтересно изучать. Фактически, если V — векторное пространство над P, то можно превратить V в абелеву алгебру Ли, положив $[v, w] = 0$ для всех $v, w \in V$. Нильпотентные алгебры Ли представляют собой следующую по трудности ступеньку после абелевых алгебр Ли. В этом параграфе мы изучим их строение, для чего нам будет необходима одна теорема теории представлений (1.3.4). Вначале установим два вспомогательных результата.

(1.3.2) *Пусть V — векторное пространство и L — подалгебра в* $\mathfrak{gl}(V)$. *Пусть элемент $s \in L$ нильпотентен*, т. е. $s^k = 0$. *Тогда элемент* $\operatorname{ad} s \in \mathfrak{gl}(L)$ *также нильпотентен*.

Доказательство. Прежде чем начинать доказательство, напомним, что $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли относительно скобочного умножения: $[s, t] = st - ts$. Пусть теперь $t \in L$. Тогда

$$(\operatorname{ad} s)\, t = st - ts, \qquad (\operatorname{ad} s)^2\, t = s^2t - 2sts + ts^2$$

и вообще

$$(\operatorname{ad} s)^j t = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} s^i t s^{j-i}.$$

В частности, если $s^k = 0$, то $(\operatorname{ad} s)^{2k} = 0$. □

(1.3.3) *Предположим, что L — алгебра Ли, I — идеал в L и (V, f) — представление алгебры L. Тогда подпространство $W = \{v \in V;\ Iv = 0\}$ инвариантно относительно L.*

Доказательство. Пусть $X \in L$, $Y \in I$, $v \in W$. Так как $f(Y)f(X) = f([Y, X]) + f(X)f(Y)$, то $f(Y)f(X)v = f([Y, X])v + f(X)f(Y)v = 0$ и $f(X)v \in W$. □

(1.3.4) *Пусть L — (лиева) подалгебра в* $\mathfrak{gl}(V)$, *состоящая из нильпотентных элементов. Тогда существует элемент $v \in V$, такой что $v \neq 0$* и $Lv = 0$.

Доказательство. Применим индукцию по $\dim L$. Если $\dim L = 1$, то $L = Ps$, где s нильпотентен. Существует целое число $k \geqslant 1$, для которого $s^k \neq 0$, но $s^{k+1} = 0$. Тогда для любого $v \in s^kV$ имеем $sv = 0$.

Предположим теперь, что $\dim L > 1$, и пусть H — собственная подалгебра в L, имеющая максимальную возможную размерность. Докажем сперва, что $\dim H = \dim L - 1$ и H есть идеал

в L. В самом деле, так как $(\mathrm{ad}\, H)\, H \subset H$, то в L/H определено представление $(L/H, f)$ алгебры H:

$$f(s)(t+H) = (\mathrm{ad}\, s)\, t + H = [s, t] + H$$

для $s \in H$, $t \in L$. Ввиду (1.3.2) все эндоморфизмы $f(s)$ нильпотентны. Далее, $\dim f(H) \leqslant \dim H$, и, значит, по предположению индукции существует такой элемент $s_0 \in L$, $s_0 \notin H$, что $f(H)(s_0 + H) = H$, т. е. $[H, s_0] \subset H$. Следовательно, $Ps_0 \bigoplus H$ — подалгебра в L, строго содержащая H. Ввиду предположения о максимальности подалгебры H, $L = Ps_0 \bigoplus H$. Отсюда следует, что H — идеал в L.

Пусть $W = \{v \in V;\ Hv = 0\}$. В силу (1.3.3), W является L-инвариантным подпространством в V и, по предположению индукции, не равно 0. Если v — ненулевой элемент из W, для которого $s_0 v \neq 0$, то $Lv = 0$. □

Пусть L — подалгебра (Ли) в $\mathfrak{gl}(V)$, каждый элемент которой нильпотентен, и пусть $0 \subset V_0 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} V_k = V$ — композиционный ряд для V. Из (1.3.4) немедленно следует, что $\dim(V_i/V_{i-1}) = 1$ и $LV_i \subset V_{i-1}$. Перефразируя этот факт в терминах подходящего базиса в V, получаем следующий результат:

(1.3.5) *Пусть L — подалгебра (Ли) в $\mathfrak{gl}(V)$, каждый элемент которой нильпотентен. Существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, что $LV_i \subset V_{i-1}$,* где $V_i = Pe_1 \bigoplus \ldots \bigoplus Pe_i$ *при $i = 1, \ldots, n$ и $V_0 = 0$.* □

В таком базисе $e_1, \ldots, e_n$ все эндоморфизмы из L представляются $n \times n$-матрицами, имеющими нули на главной диагонали и ниже. Обозначим множество всех таких матриц через $\mathfrak{u}(n, P)$. Подалгебра L в $\mathfrak{gl}(V)$ состоит из нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица s, для которой $sLs^{-1} \subset u(n, P)$ (упр. 3).

(1.3.6) *Пусть V—векторное пространство размерности n, а L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных элементов. Тогда $t_1 \ldots t_n = 0$ для любых $t_1, \ldots, t_n \in L$.*

Доказательство. Сохраняя обозначения из (1.3.5), можно записать

$$(t_1 t_2 \ldots t_n) V = t_1 \ldots t_{n-1}(t_n V) \subset t_1 \ldots t_{n-1} V_{n-1} = \ldots = 0. \ \square$$

(1.3.7) (Теорема Энгеля) *Пусть L — алгебра Ли. Если эндоморфизм $\mathrm{ad}\, X$ нильпотентен для каждого $X \in L$, то L — нильпотентная алгебра Ли.*

Доказательство. Пусть $\dim L = n$. Применяя (1.3.6) к алгебре $\mathrm{ad}\, L = \{\mathrm{ad}\, X;\ X \in L\} \subset \mathfrak{gl}(L)$, получаем $\mathrm{ad}\, X_1 \ldots \mathrm{ad}\, X_n = 0$

для любых $X_1, \ldots, X_n \in L$. Следовательно, для любого $Y \in L$ имеем $[X_1, [X_2, \ldots, [X_n, Y] \ldots]] = 0$ и $L^{n+1} = 0$. □

(1.3.8) *Если подалгебра L в $\mathfrak{gl}(V)$ состоит из нильпотентных элементов, то L — нильпотентная алгебра Ли.*

Доказательство. Это вытекает из (1.3.2) и (1.3.7). □

В каждой алгебре Ли L существует единственный максимальный нильпотентный идеал N; оказывается, что он равен сумме всех нильпотентных идеалов в L. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим прежде всего произвольное представление (V, f) алгебры L и ассоциированное с ним вполне приводимое представление (V', f'). Алгебра $f(L)$ состоит из нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда $f' \equiv 0$. Действительно, если все элементы $f(X) \in f(L)$ нильпотентны, то можно применить (1.3.5) и заключить, что $f' \equiv 0$. С другой стороны, пусть $0 = V_0 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_n = V$ — композиционный ряд для V. Если $f' \equiv 0$, то $f(X) V_i \subset V_{i-1}$ и $f(X)^n = 0$.

(1.3.9) *Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, H — подалгебра в L и K — такой идеал в L, что $L = H + K$. Если H и K состоят из нильпотентных эндоморфизмов, то каждый элемент из L нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $W = V_i/V_{i-1}$ — какое-нибудь из фактор-пространств, порожденных композиционным рядом пространства V. Положим $W' = \{w \in W;\ Kw = 0\}$. Тогда $W' \neq 0$, в силу (1.3.4), и $LW' \subset W'$, в силу (1.3.3). Снова применяя (1.3.4), найдем элемент $w \in W'$, для которого $Hw = 0$ и $w \neq 0$. Следовательно, $Lw = 0$ и, поскольку L действует в W неприводимо, $W = Pw$. Поэтому каждый элемент из L есть нильпотентное линейное преобразование. □

(1.3.10) *Пусть L — алгебра Ли H, K — ее нильпотентные идеалы. Тогда $H + K$ — нильпотентный идеал в L.*

Доказательство. Если $X \in H$ или $X \in K$, то $\operatorname{ad} X$ — нильпотентное линейное преобразование в L. Согласно (1.3.9), преобразование $\operatorname{ad} X$ нильпотентно для любого $X \in H + K$. Из теоремы Энгеля вытекает, что $H + K$ — нильпотентная алгебра Ли. □

Сумма N всех нильпотентных идеалов алгебры Ли L является, согласно (1.3.10), нильпотентным идеалом и, следовательно, наибольшим нильпотентным идеалом в L. Будем называть N *ниль-радикалом* алгебры L.

(1.3.11) *Пусть V — векторное пространство над $P = \overline{P}$, L — нильпотентная алгебра Ли и (V, f) — представление L. Тогда*

существуют набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ функций на L со значениями в P и набор $V_1, \ldots, V_k$ подпространств в V, удовлетворяющие условиям:

1) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$;

2) *для любых $X \in L$ и $i = 1, 2, \ldots, k$ подпространство V_i содержится в обобщенном собственном подпространстве преобразования $f(X)$, отвечающем собственному значению λ_i, так что $V_i = \{v \in V$: для каждого $X \in L$ найдется целое число $e \geqslant 0$, такое что $(f(X) - \lambda_i(X))^e v = 0\}$.*

Доказательство. Пусть $X \in L$ и U — обобщенное собственное подпространство эндоморфизма $f(X)$, отвечающее собственному значению λ. Так как алгебра L нильпотентна, то, в обозначениях из (1.2.1), $L = L(0)$ и, следовательно, $LU \subset U$.

Будем доказывать (1.3.11) индукцией по $\dim V$. Случай $\dim V = 1$ тривиален. Далее, если каждый эндоморфизм $f(X)$, $X \in L$, имеет только одно собственное значение, то доказывать нечего. Если же для некоторого $X_0 \in L$ эндоморфизм $f(X_0)$ имеет (по меньшей мере) два различных собственных значения, то, поскольку его обобщенные собственные подпространства инвариантны относительно L, мы можем применить предположение индукции. □

В каких случаях функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ из (1.3.11) линейны? Если алгебра L абелева, то преобразования из $f(L) | V_i$ имеют общий собственный вектор и, значит, функции λ_i линейны (см. упр. 6). В общем случае, если $\operatorname{char} P = 0$, то функции λ_i линейны при условии, что L лишь нильпотентна. Это будет доказано в (1.4.9), причем идея доказательства снова состоит в нахождении общего собственного вектора.

Упражнение 1. Показать, что подалгебра и гомоморфный образ нильпотентной алгебры Ли нильпотентны. [*Указание*: $f(L)^k = f(L^k)$.]

Упражнение 2. Пусть L — алгебра Ли и H — ее подалгебра. *Нормализатором* $\mathfrak{n}(H)$ подалгебры H называется множество $\{X \in L$: $[X, H] \subset H\}$. Показать, что $\mathfrak{n}(H)$ — подалгебра в L и H — идеал в $\mathfrak{n}(H)$. Если L нильпотентна и $H \neq L$, то $H \subsetneqq \mathfrak{n}(H)$.

Упражнение 3. Пусть $\mathfrak{u}(n, P) = \{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, P)$: $a_{ij} = 0$ при $i \geqslant j\}$. Показать, что $\mathfrak{u}(n, P)$ — нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{gl}(n, P)$. Показать, далее, что подалгебра L в $\mathfrak{gl}(n, P)$ состоит из нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица $s \in \mathfrak{gl}(n, P)$, такая что $sLs^{-1} \subset \mathfrak{u}(n, P)$.

Упражнение 4. Показать, что трехмерная алгебра Ли L_0, определяемая соотношениями $L_0 = PX_1 + PX_2 + PX_3$, $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$ и $[X_1, X_2] = X_3$, нильпотентна, но не абелева. Показать, что всякая нильпотентная неабелева алгебра Ли над P содержит подалгебру, изоморфную L_0.

Упражнение 5. Пусть L — алгебра Ли. Определим $z^k(L)$, $k = 1, 2, \ldots$, индуктивно следующим образом:

$$z^1(L) = z(L), \quad z^k(L) = \{X \in L\colon [X, L] \subset z^{k-1}(L)\}.$$

Показать, что все $z^k(L)$ — идеалы в L и что $L^k = 0$ тогда и только тогда, когда $z^{k-1}(L) = L$. Последовательность

$$0 \subset z^1(L) \subset z^2(L) \subset \ldots$$

называется *возрастающей центральной последовательностью* алгебры L.

Упражнение 6. Пусть V — векторное пространство над P и s, t — такие элементы из $\mathfrak{gl}(V)$, что $st = ts$. Показать, что для $\lambda \in P$ и $W = \{v \in V\colon sv = \lambda v\}$ выполняется соотношение $tW \subset W$. Используя это, доказать, что функции λ_i из (1.3.11) линейны, когда L абелева.

1.4. Разрешимые алгебры Ли

Пусть L — алгебра Ли. Определим $L^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, по индукции, полагая $L^{(1)} = [L, L]$, $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$. В силу (1.3.1), $L^{(k)}$ — идеал в L; он называется k-й *производной алгеброй* алгебры L. Первую производную алгебру $L^{(1)}$ называют также *коммутаторной алгеброй* алгебры L. Последовательность идеалов

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \ldots$$

называется *производной последовательностью*. Алгебру Ли L называют *разрешимой*, если $L^{(k)} = 0$ при некотором k.

Можно доказать по индукции, что для любой алгебры Ли L выполняется включение $L^{(k)} \subset L^{(k+1)}$. Действительно, $L^{(1)} = L^{(2)}$ по определению, и если $L^{(k-1)} \subset L^k$ (предположение индукции), то

$$L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] \subset [L^{(k)}, L] = L^{(k+1)}.$$

Следовательно, всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима. Однако разрешимая алгебра Ли может и не быть нильпотентной (упр. 3).

Данный параграф начинается с ряда элементарных результатов, цель которых—определить радикал алгебры Ли как наибольший разрешимый идеал. Затем мы несколько продвинемся в теории представлений разрешимых алгебр Ли, доказав утверждение, схожее с (1.3.4).

(1.4.1) *Пусть L — алгебра Ли и A — ее идеал. Алгебра L разрешима тогда и только тогда, когда A и L/A разрешимы.*

Доказательство. Так как подалгебры и гомоморфные образы разрешимых алгебр Ли разрешимы (упр. 1), то A и L/A разрешимы, если разрешима L. Обратно, допустим, что $A^{(j)} = 0$ и $(L/A)^{(k)} = 0$. Тогда $L^{(k)} \subset A$ и $L^{(k+j)} = (L^{(k)})^{(j)} \subset A^{(j)} = 0$. □

(1.4.2) *Пусть L — алгебра Ли, A и B — ее разрешимые идеалы. Тогда идеал $A + B$ также разрешим.*

Доказательство. Поскольку $(A + B)/B \cong A/(A \cap B)$, алгебры B и $(A + B)/B$ обе разрешимы. Следовательно, и алгебра $A + B$ разрешима, в силу (1.4.1). ▯

Из (1.4.2) следует, что алгебра Ли L содержит наибольший разрешимый идеал, равный сумме всех разрешимых идеалов в L. Этот идеал называется *радикалом* алгебры Ли L. Если радикал алгебры L равен 0, то говорят, что она *полупроста*.

(1.4.3) *Пусть R — радикал алгебры Ли L. Тогда факторалгебра L/R полупроста.*

Доказательство. Предположим, что R_1/R — радикал алгебры L/R. Тогда идеал R_1 разрешим, в силу (1.4.1). Поскольку R_1 — идеал, то $R_1 \subset R$. ▯

(1.4.4) *Алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда она не содержит ненулевых абелевых идеалов.*

Доказательство. Допустим, что алгебра Ли не является полупростой и R — ее радикал. Тогда $R^{(1)} = [R, R]$, ..., $R^{(k+1)} = [R^{(k)}, R^{(k)}]$ — идеалы в L, ввиду (1.3.1). Так как R — разрешимая алгебра, то существует целое число $k \geqslant 0$, такое что $R^{(k)} \neq 0$, но $R^{(k+1)} = [R^{(k)}, R^{(k)}] = 0$ (мы полагаем $R^{(0)} = R$). Тогда $R^{(k)}$ — абелев идеал в L. Обратное очевидно. ▯

Мы обратимся сейчас к теории представлений разрешимых алгебр Ли. Основной результат здесь (1.4.6) принадлежит С. Ли. Чтобы доказать его, нам придется предположить, что $\operatorname{char} P = 0$.

(1.4.5) *Пусть P — поле характеристики 0 и V — векторное пространство над P. Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ и A — идеал в L. Допустим, что существует вектор $v \neq 0$ из V, такой что $Av \subset Pv$. Если $Y \in A$ и $Yv = av$, то для любых $X_1, \ldots, X_k \in L$ имеет место равенство*

$$YX_1 \ldots X_kv = aX_1X_2 \ldots X_kv.$$

Доказательство. Зафиксируем $X \in L$. Для всякого $Z \in A$ определим последовательность элементов из A, полагая

$$Z_0 = Z,\ Z_1 = [Z, X], \ldots, Z_k = [Z_{k-1}, X], \ldots.$$

Поскольку все Z_k принадлежат A, существуют элементы $a_k(Z) \in P$, такие что $Z_kv = a_k(Z)\,v$. Покажем индукцией по k, что

$$(1)\quad ZX^kv = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j(Z)\, X^{k-j}v \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

для любого $Z \in A$. Это равенство очевидно при $k = 0$; допустим, что оно выполнено при некотором k. Зафиксируем $Y \in A$. Нам надо доказать, что

$$YX^{k+1}v = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a_j(Y) X^{k+1-j} v.$$

Так как (1) выполняется для $Z = Y_1 = [Y, X]$, то

$$(2) \qquad Y_1X^kv = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j(Y_1) X^{k-j}v = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_{j+1}(Y) X^{k-j}v.$$

Отсюда

$$YX^{k+1} = ([Y,X] + XY) X^kv = Y_1X^kv + XYX^kv$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_{j+1}(Y) X^{k-j}v + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j(Y) X^{k-j+1}v$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \left(\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right) a_j(Y) X^{k-j+1}v$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a_j(Y) X^{k-j+1}v,$$

чем (1) и доказано.

Далее, предположим, что m — наибольшее целое число, для которого множество $\{v, Xv, \ldots, X^{m-1}v\}$ линейно-независимо, и рассмотрим подпространство $U = Pv + PXv + \ldots + PX^{m-1}v$. Положим $B = A + PX$; так как A — идеал, то B — подалгебра в L. Очевидно, что $X^kv \in U$ для любого целого $k \geqslant 0$. В силу (1) отсюда следует, что подпространство U инвариантно относительно A, а значит и относительно B.

Возьмем теперь произвольный элемент $Y \in A$. Матрица эндоморфизма $Y_j|_U$ в базисе $\{v, Xv, \ldots, X^{m-1}v\}$ имеет диагональные элементы $a_0(Y_j) = a_j(Y)$. Поэтому ее след равен $ma_j(Y)$. С другой стороны, так как $\operatorname{tr}(st) = \operatorname{tr}(ts)$, то $\operatorname{tr}[s,t] = 0$ для любых $s, t \in \mathfrak{gl}(V)$. Но $Y_j = [Y_{j-1}, X]$ при $j \geqslant 1$; значит, $\operatorname{tr}(Y_j|_U) = 0$. Поскольку char $P = 0$, отсюда вытекает, что $a_j(Y) = 0$ при $j \geqslant 1$. Поэтому, ввиду (1), $YX^kv = a_0(Y)X^kv$.

Докажем теперь индукцией по k, что $YX_1 \ldots X_kv = aX_1 \ldots X_kv$, учитывая, что случай $k = 1$ только что нами рассмотрен. Если $k > 1$ и $X_2 \ldots X_kv = 0$, то доказываемое равенство справедливо. В противном случае все следует из его справедливости при $k = 1$,

поскольку $YX_2 \ldots X_k v = aX_2 \ldots X_k v$ по предположению индукции. ▯

(1.4.6) (Теорема Ли) *Пусть V — векторное пространство над $P = \overline{P}$, $\operatorname{char} P = 0$, и пусть L — разрешимая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда существует вектор $v \in V$, такой что $v \neq 0$ и $Lv \subset Pv$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $\dim L$. Случай $\dim L = 1$ очевиден. Допустим, что теорема справедлива для всех разрешимых алгебр Ли, имеющих размерность $< n = \dim L$. Поскольку L разрешима, $L \neq L^{(1)} = L^2$. Далее, всякое векторное подпространство в L, содержащее $L^{(1)}$, является идеалом в L; поэтому найдется идеал N в L, такой что $\dim N = n - 1$ и $N \supset L^{(1)}$. Пусть элемент $X \in L$ таков, что $L = N + PX$. По предположению индукции найдется вектор $v \neq 0$, для которого $Nv \subset Pv$. Пусть $U = \sum_{j=0}^{\infty} PX^j v$. Согласно (1.4.5), для каждого $Y \in N$ мы имеем $Y|_U = a(Y)\,1$, где $a(Y) \in P$ и 1 — тождественное отображение U на себя. Поскольку U инвариантно относительно X, существует вектор $u \neq 0$ из U, такой что $Xu \in Pu$. Следовательно, $Lu \subset Pu$. ▯

Оставшаяся часть параграфа посвящена следствиям этой теоремы. Прежде всего заметим, что из (1.4.6) вытекает, что единственными неприводимыми представлениями разрешимой алгебры Ли над полем $\overline{P}$ являются представления размерности 1. Более общим образом, рассмотрение композиционного ряда представления дает следующий результат:

(1.4.7) *Пусть V — векторное пространство над $P = \overline{P}$, $\operatorname{char} P = 0$, L — разрешимая алгебра Ли и (V, f) — ее представление. Существует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, такой что*

$$f(X)e_j = \sum_{i=1}^{j} f_{ij}(X)e_i \quad (X \in L),$$

где $f_{ij}(X) \in P$.

Пусть $\mathfrak{t}(n, P)$ — множество всех верхне-треугольных $n \times n$-матриц, т. е. $\mathfrak{t}(n, P) = \{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, P)\colon a_{ij} = 0,\ i > j\}$. Подалгебра L алгебры $\mathfrak{gl}(n, P)$ разрешима тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой подалгебре алгебры $\mathfrak{t}(n, P)$ (упр. 2).

(1.4.8) *Пусть L — разрешимая алгебра Ли размерности n над $P = \overline{P}$ и $\operatorname{char} P = 0$. Существует последовательность идеалов в L*

$$L = L_n \supset L_{n-1} \supset \cdots \supset L_0 = 0,$$

такая что $\dim L_j = j$ при $j = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Достаточно взять композиционный ряд для (L, ad). ▯

(1.4.9) *Функции* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *из* (1.3.11) *линейны, если* char $P = 0$.

Доказательство. Поскольку нильпотентные алгебры Ли разрешимы, в каждом подпространстве V_i из (1.3.11) мы можем выбрать базис, о котором говорится в (1.4.7). Тогда диагональные элементы всех матриц $f(X)$ будут равны $\lambda_i(X)$. ▯

Доказательство нашего следующего результата значительно упрощается, если воспользоваться приемом, известным под названием «расширение поля коэффициентов». Поэтому здесь мы докажем пока этот результат лишь в частном случае, отложив общий случай до упр. 4 § 1.6.

(1.4.10) *Пусть P — поле характеристики* 0. *Алгебра Ли L над P разрешима тогда и только тогда, когда алгебра $L^{(1)}$ нильпотентна.*

Доказательство. Если $L^{(1)}$ нильпотентна, то L разрешима в силу (1.4.1), поскольку $L/L^{(1)}$ абелева. .

Обратную импликацию мы докажем только для случая $P = \bar{P}$. Согласно (1.4.7), в этом случае можно выбрать базис в L, относительно которого все преобразования ad X ($X \in L$) имеют верхнетреугольные матрицы. Следовательно, преобразование ad $[X, Y]$ для любых $X, Y \in L$ представляется верхне-треугольной матрицей с нулями на диагонали и потому нильпотентно. Это означает ввиду (1.3.7), что алгебра $L^{(1)}$ нильпотентна. ▯

В заключение параграфа докажем теорему Э. Картана о неприводимых подалгебрах алгебры $\mathfrak{gl}(V)$. Предварительно сделаем несколько замечаний, вводящих в курс дела. Пусть V — векторное пространство над полем P характеристики нуль, 1 — тождественное отображение V на себя и $\mathfrak{z}(V) = P1$. Тогда $\mathfrak{gl}(V)$ является прямой суммой *идеалов* $\mathfrak{sl}(V)$ и $\mathfrak{z}(V)$, т. е.

$$\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{sl}(V) \oplus \mathfrak{z}(V).$$

Действительно, $\mathfrak{z}(V)$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ и потому является идеалом. Далее, если $s \in \mathfrak{gl}(V)$, то

$$s = (s - (\operatorname{tr} s/\dim V)\,1) + (\operatorname{tr} s/\dim V)\,1.$$

Так как P имеет характеристику 0, то $\mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{z}(V) = 0$.

(1.4.11) (Э. Картан) *Пусть V — векторное пространство над $P = \bar{P}$, char $P = 0$, и пусть L — неприводимая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда L либо полупроста, либо равна прямой сумме $\mathfrak{z}(V)$ и некоторого полупростого идеала.*

Доказательство. Пусть R — радикал алгебры L. Поскольку R — разрешимая алгебра, то в силу (1.4.6) существует вектор $v \neq 0$ из V, для которого $Rv \subset Pv$. Рассмотрим подпространство U в V, порожденное множеством $\{s_1 s_2 \dots s_k v\colon s_i \in L,\ k = 0, 1, 2, \dots\}$. Ясно, что U инвариантно относительно L; поэтому, ввиду неприводимости L, $U = V$. Используя (1.4.5), отсюда легко вывести, что если $r \in R$, то $r = a1$ $(a \in P)$, т. е. $R \subset \mathfrak{z}(V)$.

Если $R = 0$, то алгебра L полупроста. В противном случае $R = \mathfrak{z}(V) \subset L$ и $L = (\mathfrak{sl}(V) \cap L) \oplus \mathfrak{z}(V)$. Но $\mathfrak{sl}(V) \cong L/R$; следовательно, $\mathfrak{sl}(V) \cap L$ — полупростая алгебра. $\square$

Упражнение 1. Показать, что подалгебры и гомоморфные образы разрешимых алгебр Ли разрешимы. [*Указание*: $f(L)^{(k)} = f(L^{(k)})$.]

Упражнение 2. Показать, что $\mathfrak{t}(n, P)$ — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(n, P)$. Показать, что если $P = \overline{P}$ и $\operatorname{char} P = 0$, то подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(n, P)$ разрешима тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой подалгебре алгебры $\mathfrak{t}(n, P)$.

Упражнение 3. Показать, что $\mathfrak{t}(2, P)$ разрешима, но не нильпотентна.

Упражнение 4. Показать, что всякая двумерная алгебра Ли над P изоморфна одной из следующих двух алгебр:

$$L_1 = PX_1 + PX_2, \quad [X_1, X_2] = 0,$$

$$L_2 = PX_1 + PX_2, \quad [X_1, X_2] = X_2.$$

Показать, что L_2 разрешима, но не нильпотентна.

Упражнение 5. Показать, что если алгебра L проста, то она полупроста и $L = L^{(1)}$.

Упражнение 6. Показать, что теорема Ли неверна в случае $P \neq \overline{P}$, рассмотрев одномерную алгебру Ли

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\},$$

где $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

Упражнение 7. Показать, что предложение (1.4.8) несправедливо в случае $P \neq \overline{P}$, рассмотрев алгебру

$$L = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3, \quad [X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = 0$$

и показав, что она не имеет одномерных идеалов.

1.5. Формы Киллинга и невырожденные алгебры Ли

Пусть V — векторное пространство над P. *Симметричная билинейная форма* на V — это отображение $w\colon V \times V \to \widetilde{P}$ (где $\widetilde{P}$ — некоторое расширение поля P), такое что

1) $w(x, y) = w(y, x)$,

2) w билинейно,

Если U — подпространство в V, то ограничение формы w на $U \times U$ определяет билинейную форму w_U на U. *Ортогональное дополнение* подпространства U относительно w определяется формулой

$$U^\perp = \{x \in V: w(x, U) = 0\}.$$

Если $V^\perp = 0$, то w называется *невырожденной*. В этом случае, как можно показать, справедлив следующий результат:

(1.5.1) *Пусть w — невырожденная симметричная билинейная форма на V и U — подпространство в V. Тогда*

1) $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$;

2) w_U *невырожденна в том и только том случае, когда* $U \cap U^\perp = 0$.

Симметричная билинейная форма w на алгебре A называется *инвариантной*, если $w(xy, z) = w(x, yz)$ для любых $x, y, z \in A$.

(1.5.2) *Пусть w — инвариантная симметричная билинейная форма на алгебре A. Если I — идеал в A, то и $I^\perp$ — идеал.*

Доказательство. Предположим, что $x \in I^\perp$ и $y \in A$. Для любого $z \in I$ имеем $w(xy, z) = w(x, yz) = 0$. Следовательно, $xy \in I^\perp$. Аналогично из равенства $w(yx, z) = w(x, zy)$ следует, что $yx \in I^\perp$. $\square$

С точки зрения изучения строения алгебр инвариантные формы важны тем, что их можно использовать для разложения алгебр. Прежде чем сформулировать точный результат, напомним, что алгебра B проста, если $B^2 \neq 0$ и единственными ее идеалами являются 0 и B.

(1.5.3) (Э. Артин) *Пусть A — алгебра, не имеющая ненулевых идеалов I, для которых $I^2 = 0$. Если она обладает невырожденной инвариантной симметричной билинейной формой, то ее можно представить в виде прямой суммы простых идеалов: $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где $A_iA_j = 0$, $i \neq j$. Это разложение единственно с точностью до порядка слагаемых.*

Доказательство. Чтобы доказать существование требуемого разложения, проведем индукцию по $\dim A$. Пусть $I \neq 0$ — некоторый минимальный идеал в A. Согласно (1.5.2), $I^\perp$ — также идеал в A, а поскольку I минимален, то $I \cap I^\perp = 0$ или $I \cap I^\perp = I$. Но равенство $I \cap I^\perp = I$ невозможно. Действительно, если $I \subset I^\perp$, то $w_I = 0$. Далее, $I^2 = I$, в силу минимальности I. Поэтому если $a \in I$, то

$$w(a, A) \subset w(I^2, A) = w(I, IA) = 0,$$

в противоречие с условием невырожденности w. Следовательно, $I \cap I^\perp = 0$ и, согласно (1.5.1), $A = I \oplus I^\perp$. Кроме того, $I \cdot I^\perp$

$\subset I \cap I^{\perp} = 0$. Форма w определяет невырожденную симметричную билинейную форму на $I^{\perp}$, поэтому мы можем применить предположение индукции, если $I^{\perp} \neq 0$.

Предположим теперь, что $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_h$, где все B_j — простые идеалы. Так как $B_1^2 \neq 0$, то $B_1 A = B_1 A_1 + \ldots + B_1 A_k \neq 0$. Следовательно, найдется A_i, для которого $B_1 A_i \neq 0$. Но как B_1, так и A_i — простые идеалы, поэтому $B_1 = A_i$. Отсюда вытекает, что набор $\{B_i\}$ является перестановкой набора $\{A_i\}$. □

Теперь применим полученные результаты к алгебрам Ли. Прежде всего нам нужны инвариантные формы.

(1.5.4) *Пусть L — алгебра Ли и (V, f) — ее представление. Тогда равенство*

$$B_f(X, Y) = \operatorname{tr} f(X) f(Y) \qquad (X, Y \in L)$$

определяет инвариантную симметричную билинейную форму на L.

Доказательство. Здесь все очевидно, за исключением разве что инвариантности. Но

$$\begin{aligned} B_f([X, Y], Z) &= \operatorname{tr} f([X, Y]) f(Z) = \operatorname{tr} [f(X), f(Y)] f(Z) \\ &= \operatorname{tr} f(X) f(Y) f(Z) - \operatorname{tr} f(Y) f(X) f(Z) \\ &= \operatorname{tr} f(X) [f(Y), f(Z)] = B_f(X, [Y, Z]). \ \square \end{aligned}$$

Среди этих инвариантных форм мы выделим одну. Это форма B_{ad}, называемая *формой Киллинга* алгебры L. Мы будем всегда обозначать ее просто B:

$$B(X, Y) = \operatorname{tr} \operatorname{ad} X \cdot \operatorname{ad} Y \qquad (X, Y \in L).$$

(1.5.5) *Пусть L — алгебра Ли, A — идеал в L, B и B' — формы Киллинга на L и A соответственно, а B_A — ограничение формы B на A. Тогда $B_A = B'$.*

Доказательство. Пусть $\{X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n\}$ — такой базис в L, что $\{X_1, \ldots, X_m\}$ есть базис в A. Предположим, что

$$(\operatorname{ad} Y) X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(Y) X_k \qquad (Y \in L).$$

Тогда $a_{ij}(Y) = 0$ при $i > m$, если $Y \in A$, поскольку A — идеал в L. Следовательно, для $Y_1, Y_2 \in A$ мы имеем

$$\begin{aligned} B(Y_1, Y_2) &= \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(Y_1) a_{ji}(Y_2) \\ &= \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij}(Y_1) a_{ji}(Y_2) = B'(Y_1, Y_2). \ \square \end{aligned}$$

Алгебра Ли L называется *невырожденной*, если ее форма Киллинга невырожденна. Невырожденные алгебры Ли обладают многими хорошими свойствами. Некоторые из них мы сейчас установим.

(1.5.6) *Пусть L — невырожденная алгебра Ли над P. Тогда L полупроста и может быть разложена в прямую сумму простых идеалов единственным с точностью до порядка слагаемых способом.*

Доказательство. Для доказательства того, что L полупроста, допустим, что A — абелев идеал в L. Пусть $\{X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n\}$ — базис в L, такой что $\{X_1, \ldots, X_m\}$ — базис в A. Пусть, далее, Z — произвольный элемент из A и $Y \in L$. Тогда $\operatorname{ad} Y \cdot \operatorname{ad} Z$ переводит каждый элемент X_i в 0, если $1 \leqslant i \leqslant m$, поскольку A абелева. Кроме того, $\operatorname{ad} Y \cdot \operatorname{ad} Z$ переводит каждый элемент X_j, $m+1 \leqslant j \leqslant n$, в элемент из A, поскольку A — идеал в L. Отсюда следует, что $B(Y, Z) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y \cdot \operatorname{ad} Z) = 0$. Поскольку Y был выбран произвольно, а L невырожденна, мы заключаем, что $Z = 0$, т. е. $A = 0$. Следовательно, L полупроста, ввиду (1.4.4). Остальные утверждения немедленно следуют из (1.5.3). □

Забегая вперед, приведем два результата из гл. 2, где рассматриваются лишь алгебры Ли над полем характеристики 0. А именно, мы доказываем там, что

(2.1.2) *L разрешима тогда и только тогда, когда $B \equiv 0$ на $L^{(1)}$.*

(2.1.3) *Всякая полупростая алгебра Ли невырожденна.*

Отсюда следует, что в случае $\operatorname{char} P = 0$ алгебра L невырожденна тогда и только тогда, когда она полупроста. В этом случае, согласно (1.5.6), L можно разложить в прямую сумму простых алгебр Ли.

Что из себя представляют простые алгебры Ли над P? Для $P = \mathbb{C}$ простые алгебры Ли — это классические алгебры Ли вместе с пятью «исключительными» алгебрами (это главный результат гл. 2). Для $P = \mathbb{R}$ классификация будет дана в гл. 8; грубо говоря, там утверждается, что простые алгебры Ли над $\mathbb{R}$ можно получить с помощью одного изящного приема из простых алгебр над $\mathbb{C}$.

Пусть L — алгебра Ли над полем P произвольной характеристики. Эндоморфизм δ векторного пространства L называется *дифференцированием* алгебры L, если

$$\delta([X, Y]) = [\delta X, Y] + [X, \delta Y] \quad \text{для всех } X, Y \in L.$$

Мы будем обозначать множество всех дифференцирований алгебры L через $\operatorname{der}(L)$. Согласно упр. 3 § 1.1 и упр. 4 § 1.2, $\operatorname{der}(L)$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}(L)$, содержащей $\operatorname{ad} X$ для каждого $X \in L$. Дифференцирования вида $\operatorname{ad} X$ называются *внутренними*.

Положим $\operatorname{ad}(L) = \{\operatorname{ad} X\colon X \in L\}$. Легко показать, что $\delta\cdot\operatorname{ad} X = \operatorname{ad}(\delta X) + \operatorname{ad} X\cdot\delta$ для всех $\delta \in \operatorname{der}(L)$, $X \in L$. Отсюда следует, что $\operatorname{ad}(L)$ — *идеал* в $\operatorname{der}(L)$. Мы назовем алгебру L *полной*, если $\operatorname{der}(L) = \operatorname{ad}(L)$ и $z(L) = 0$.

(1.5.7) *Пусть L — алгебра Ли и A — идеал в L. Если A полна, то существует идеал B в L, такой что $L = A \oplus B$.*

Доказательство. Множество $B = \{X \in L\colon [X, A] = 0\}$ является идеалом в L, в силу тождества Якоби. Зададим для каждого $X \in L$ дифференцирование $\delta(X)$ алгебры A, полагая $\delta(X) = \operatorname{ad} X|_A$. Поскольку A полна, существует такой элемент $X_1 \in A$, что $\delta(X)Y = [X_1, Y]$ для всех $Y \in A$. Следовательно, $X - X_1 \in B$ и $L = A + B$. С другой стороны, $A \cap B = 0$, поскольку $A \cap B = z(A)$. ▯

(1.5.8) *Всякая невырожденная алгебра Ли полна.*

Доказательство. Пусть L — алгебра Ли над P, имеющая невырожденную форму Киллинга B'. Так как $z(L)$ содержится в радикале алгебры L, то, в силу (1.5.6), $z(L) = 0$. Остается показать, что $\operatorname{ad}(L) = \operatorname{der}(L)$.

Для данного дифференцирования δ алгебры L мы построим алгебру Ли $\widetilde{L}$, такую что $\dim \widetilde{L} = \dim L + 1$. А именно положим

$$\widetilde{L} = \{(a, X)\colon a \in P,\ X \in L\},$$

$$[(a, X), (b, Y)] = (0,\ a\cdot\delta Y - b\cdot\delta X + [X, Y]).$$

Тогда $\{(0, X)\colon X \in L\}$ — идеал в $\widetilde{L}$, изоморфный L. Пусть B — форма Киллинга на $\widetilde{L}$. Тогда $L^\perp = \{z \in \widetilde{L}\colon B(z, L) = 0\}$ — ненулевой идеал в $\widetilde{L}$, в силу (1.5.2). Далее, ограничение B_L формы B на L невырожденно, в силу (1.5.5). Отсюда следует, что $L \cap L^\perp = 0$, $\widetilde{L} = L \oplus L^\perp$ и $[L, L^\perp] = 0$. Наконец, пусть $(1, 0) = X + Z$, где $X \in L$ и $Z \in L^\perp$. Тогда для любого $Y \in L$ мы имеем

$$(0, \delta Y) = [(1, 0), (0, Y)] = [(0, X), (0, Y)] = (0, [X, Y]),$$

и $\delta = \operatorname{ad} X$. ▯

Упражнение 1. Пусть B — форма Киллинга на $\mathfrak{sl}(2, P)$. Доказать, что $B(X, Y) = 4\operatorname{tr}(XY)$. Показать, что B невырожденна, если $\operatorname{charr} P \neq 2$.

Упражнение 2. Пусть L — двумерная неабелева алгебра Ли:

$$L = PX_1 + PX_2, \qquad [X_1, X_2] = X_2.$$

Доказать, что L полна.

Упражнение 3. Показать, что если δ — дифференцирование алгебры Ли L, то $\delta L^k \subset L^k$ и $\delta L^{(k)} \subset L^{(k)}$ для всех k.

Упражнение 4. Пусть δ — дифференцирование алгебры Ли L, имеющей форму Киллинга B. Показать, что

$$B(\delta X, Y) + B(X, \delta Y) = 0 \text{ для всех } X, Y \in L.$$

Упражнение 5. Пусть L — простая алгебра Ли над $P = \overline{P}$, и пусть w_1, w_2 — инвариантные симметричные билинейные формы на L. Если w_1 невырожденна, то $w_2 = cw_1$ для некоторого $c \in P$.

[*Указание.* Для фиксированного $X \in L$ отображение $L \ni Y \longmapsto w_2(X, Y)$ линейно. Поскольку w_1 невырожденна, существует единственный элемент $X' \in L$, для которого $w_2(X, Y) = w_1(X', Y)$ при всех $Y \in L$. Очевидно, что отображение s: $X \longmapsto X'$ линейно. Используя инвариантность форм w_1 и w_2, проверьте, что $\operatorname{ad} X \circ s = s \circ \operatorname{ad} X$ для всех $X \in L$. После этого остается только применить лемму Шура (1.2.3).]

1.6. Расширения полей коэффициентов

Пусть $\widetilde{P}$ — некоторое поле, содержащее P в качестве подполя, и V — векторное пространство над P. Рассмотрим $\widetilde{P}$ как векторное пространство над P (размерность которого может быть и бесконечной) и построим тензорное произведение $\widetilde{P} \otimes V$ над P. Пусть $a \in \widetilde{P}$. Так как отображение прямого произведения $\widetilde{P} \times V$ в $\widetilde{P} \otimes V$, определенное формулой $(b, v) \longmapsto ab \otimes v$, билинейно над P, то существует эндоморфизм $\tilde{a}$ пространства $\widetilde{P} \otimes V$ над P, такой что $\tilde{a}(b \otimes v) = ab \otimes v$. Полагая

$$ax = \tilde{a}x \quad \text{при} \quad a \in \widetilde{P}, \quad x \in \widetilde{P} \otimes V,$$

мы превратим $\widetilde{P} \otimes V$ в векторное пространство над $\widetilde{P}$. Примем для полученного таким образом векторного пространства над $\widetilde{P}$ (общеупотребительное) обозначение $V^{\widetilde{P}}$.

Используя вложение $V \ni v \longmapsto 1 \otimes v \in V^{P}$, мы можем считать V подмножеством в $V^{\widetilde{P}}$. Далее, если $e_1, \ldots, e_m$ — базис пространства V над P, то $1 \otimes e_1 = e_1, \ldots, 1 \otimes e_m = e_m$ — базис пространства $V^{\widetilde{P}}$ над $\widetilde{P}$. Если W — векторное подпространство в V, то векторное подпространство в $V^{\widetilde{P}}$, порожденное W, можно отождествить с $W^{\widetilde{P}}$.

Всякое линейное отображение s из V в произвольное векторное пространство U над P продолжается до линейного отображения $s^{\widetilde{P}}$: $V^{\widetilde{P}} \to U^{\widetilde{P}}$. А именно:

$$s^{\widetilde{P}}(a_1 e_1 + \cdots + a_m e_n) = a_1 s(e_1) + \cdots + a_n s(e_m), \quad a_i \in \widetilde{P}.$$

Отображение $s^{\widetilde{P}}$ однозначно определяется отображением s, и в тех случаях, когда это не может вызвать путаницы, мы будем писать s вместо $s^{\widetilde{P}}$. Ясно, что

$$\widetilde{P} \otimes \operatorname{Hom}(V, U) = \operatorname{Hom}\left(V^{\widetilde{P}}, U^{\widetilde{P}}\right);$$

в частности, беря $V = U$, мы видим, что $\mathfrak{gl}(V)$ можно рассматривать как подмножество в $\mathfrak{gl}(V^P) = \widetilde{P} \otimes \mathfrak{gl}(V)$.

Рассмотрим теперь некоторую алгебру Ли L над полем P. Расширяя P до $\widetilde{P}$, мы получим *векторное пространство* $L^{\widetilde{P}}$ над $\widetilde{P}$. Операция умножения $L \times L \to L$ порождает линейные отображения $L \otimes L \to L$ и $L^{\widetilde{P}} \otimes L^{\widetilde{P}} \to L^{\widetilde{P}}$, а тем самым билинейное отображение умножения $L^{\widetilde{P}} \times L^{\widetilde{P}} \to L^{\widetilde{P}}$. Фактически, если $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — базис L над P, то

$$[\sum a_i X_i, \ \sum b_j X_j] = \sum a_i b_j [X_i, X_j]$$

для всех $a_i, b_i \in \widetilde{P}$. Определенное так умножение на $L^{\widetilde{P}}$ превращает $L^{\widetilde{P}}$ в алгебру Ли над $\widetilde{P}$. Приведем без доказательства несколько (легко проверяемых) утверждений.

1) *Если H — подалгебра в L, то $H^{\widetilde{P}}$ — подалгебра в $L^{\widetilde{P}}$.*

2) *Если H — идеал в L, то $H^{\widetilde{P}}$ — идеал в $L^{\widetilde{P}}$.*

3) *Если δ — дифференцирование алгебры L, то $\delta^{\widetilde{P}}$ — дифференцирование алгебры $L^{\widetilde{P}}$. В частности, если δ — внутреннее дифференцирование, то таково же и $\delta^{\widetilde{P}}$.*

4) *Если A и B — подпространства в L, то $[A^{\widetilde{P}}, B^{\widetilde{P}}] = [A, B]^{\widetilde{P}}$.*

(1.6.1) *Пусть L — алгебра Ли над P и $\widetilde{P}$ — расширение поля P.*

1) *Если алгебра L абелева (соотв. нильпотентна, разрешима или невырожденна), то такова же и $L^{\widetilde{P}}$, и обратно.*

2) *Если алгебра $L^{\widetilde{P}}$ проста или полупроста, то тем же свойством обладает и L.*

Доказательство. В силу приведенного выше утверждения 4),

$$(L^{(k)})^{\widetilde{P}} = (L^{\widetilde{P}})^{(k)} \text{ и } (L^{(k)})^{\widetilde{P}} = (L^{\widetilde{P}})^{(k)}.$$

Поэтому L является абелевой (соотв. нильпотентной или разрешимой) тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает $L^{\widetilde{P}}$.

Пусть теперь $X_1, \ldots, X_n$ — некоторый базис L над P, B — форма Киллинга алгебры L, а $B^{\widetilde{P}}$ — форма Киллинга алгебры $L^{\widetilde{P}}$. Тогда $B(X, Y) = B^{\widetilde{P}}(X, Y)$ для всех $X, Y \in L$. Поскольку алгебра L является невырожденной в том и только том случае, когда $\det(B(X_i, X_j)) \neq 0$, отсюда следует, что L невырожденна тогда и только тогда, когда $L^{\widetilde{P}}$ невырожденна.

Наконец, если A — идеал в L, такой что $0 \neq A \neq L$, то $0 \neq A^{\widetilde{P}} \neq L^{\widetilde{P}}$. Следовательно, если алгебра $L^{\widetilde{P}}$ проста, то такова же и L. Далее, если A — ненулевой абелев идеал в L, то

$A^{\widetilde{P}}$ — ненулевой абелев идеал в $L^{\widetilde{P}}$. Поэтому если алгебра $L^{\widetilde{P}}$ полупроста, то и L полупроста. $\square$

В качестве применения приема расширения исходного поля докажем следующее утверждение:

(1.6.2) *Если* $\operatorname{char} P = 0$ *и* $\dim V \geqslant 2$, *то алгебра* $\mathfrak{sl}(V)$ *проста, а* $\mathfrak{z}(V)$ *является центром алгебры* $\mathfrak{gl}(V)$.

Доказательство. Предположим вначале, что $P = \overline{P}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{sl}(V)$, очевидно, неприводима и $\mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{z}(V) = 0$, из теоремы Картана (1.4.11) следует, что алгебра $\mathfrak{sl}(V)$ полупроста. Далее, симметричная билинейная форма w на $\mathfrak{sl}(V)$, определенная формулой $w(X, Y) = \operatorname{tr} XY$, инвариантна и невырожденна (упр. 5). В силу (1.5.3), $\mathfrak{sl}(V)$ является прямой суммой простых идеалов: $\mathfrak{sl}(V) = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots$. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис пространства V, и пусть $s \in \mathfrak{sl}(V)$ выбрано так, что $se_j = a_je_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$, $a_1 + \ldots + a_m = 0$. Тогда $s = s_1 + s_2 + \ldots$, где $s_i \in S_i$. Поскольку $s \neq 0$, хотя бы один из элементов s_i отличен от нуля. Произведя, если надо, перенумерацию, мы можем считать, что $s_1 \neq 0$. Так как $[s_1, s] = 0$, то $s_1e_j = b_je_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, для некоторых $b_j \in P$.

Предположим теперь, что алгебра S_1 приводима и $S_1W \subset W$, где W — векторное подпространство в V, удовлетворяющее условию $0 \neq W \neq V$. (Мы хотим прийти к противоречию.) Поскольку $s_1|_W$ — также полупростой эндоморфизм, существует базис $e_1', \ldots, e_k'$ в W, такой что $s_1e_j' \in Pe_j'$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Этот базис можно расширить до базиса $e_1', \ldots, e_m'$ пространства V, выбирая элементы $e_{k+1}', \ldots, e_m'$ среди $e_1, \ldots, e_m$. Меняя, если надо, обозначения, мы можем считать, что $e_1, \ldots, e_k$ — базис W и $s_1e_j = b_je_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Поскольку $\operatorname{tr} s_1 = 0$, то s_1 имеет (по меньшей мере) два различных собственных числа, которые мы можем (после перенумерации) считать равными b_1 и b_m. Введем эндоморфизм $t \in \mathfrak{sl}(V)$, полагая $te_1 = e_m$ и $te_j = 0$ при $j \geqslant 2$. Тогда $[t, s_1]e_1 = (b_1 - b_m)e_m$, что противоречит условию $S_1W \subset W$. Следовательно, алгебра S_1 неприводима и, по лемме Шура (1.2.3), $S_2 \subset \mathfrak{z}(V)$. Отсюда следует, что $S_2 = 0$ и $\mathfrak{sl}(V) = S_1$ — простая алгебра. Общий случай $(P \subset \overline{P})$ следует теперь из (1.6.1).

Пусть, наконец, C — центр алгебры $\mathfrak{gl}(V)$. Снова по лемме Шура $C^{\overline{P}} \subset \mathfrak{z}(V)^{\overline{P}}$. Следовательно, $C = z(V)$. $\square$

Упражнение 1. Пусть L — алгебра Ли над P, V — векторное пространство над $\widetilde{P} \supset P$ и (V, f) — представление алгебры L. Показать, что линейная оболочка множества $f(L)$ в $\mathfrak{gl}(V^{\widetilde{P}})$ есть гомоморфный образ алгебры $L^{\widetilde{P}}$.

Для всякого комплексного числа s пусть $\overline{s}$ обозначает комплексно-сопряженное число. Для $S = (s_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ положим $\overline{S} = (\overline{s_{ij}})$. Матрица $S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ называется *косоэрмитовой*, если $S + {}^t\overline{S} = 0$.

Упражнение 2. Пусть $\mathfrak{u}(n)$ — множество всех косоэрмитовых матриц из $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Показать, что $\mathfrak{u}(n)$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$, не изоморфная $\mathfrak{gl}(n, R)$ при $n \geqslant 2$, но

$$\mathfrak{u}(n)^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

[*Указание.* Множество $\mathfrak{u}(n)$ состоит из полупростых линейных преобразований. Если $\mathfrak{u}(n)$ содержит подалгебру $\mathfrak{v}$, изоморфную алгебре L_2 из упр. 4 § 1.4, то алгебра $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \neq 0$ должна, согласно (1.4.7), состоять из нильпотентных матриц — противоречие. С другой стороны, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ содержит L_2. Следовательно, эти две алгебры не изоморфны. Заметим также, что комплексная линейная оболочка алгебры $\mathfrak{u}(n)$ или $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ совпадает с $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.]

Упражнение 3. Пусть $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ рассматривается как алгебра Ли над $\mathbb{R}$; обозначим ее через $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Показать, что при $n \geqslant 2$ алгебра $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ есть простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$, но алгебра $\left(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{C}}$ не является простой.

Упражнение 4. Закончить доказательство предложения (1.4.10).

Упражнение 5. Показать, что $w(X, Y) = \operatorname{tr}(X, Y)$ — невырожденная симметричная билинейная инвариантная форма на $\mathfrak{sl}(V)$. [*Указание.* Пусть E_{ij} обозначает матрицу размера $n \times n$, у которой на i, j-м месте стоит 1, а на остальных местах — нули. Если $w(X, Y) = 0$, то пусть Y пробегает значения E_{ij}, $i \neq j$, и $E_{ii} - E_{i+1, i+1}$.]

1.7. Алгебры Ли размерности $\leqslant 3$

Для того чтобы найти все алгебры Ли L размерности 3, рассмотрим вначале несколько более общую постановку задачи. Будем называть алгебру A *антикоммутативной*, если $XX = 0$ для всех $X \in A$. Пусть A — антикоммутативная алгебра и $E_1, \ldots, E_n$ — базис в A. Тогда $E_iE_i = 0$ и $E_iE_j = -E_jE_i$. Поэтому, задавая таблицу умножения относительно фиксированного базиса, достаточно указывать лишь одно из произведений E_iE_j или E_jE_i, $i \neq j$. В дальнейшем мы будем этим пользоваться.

(1.7.1) *Пусть A — антикоммутативная алгебра размерности $\leqslant 2$. Тогда A является алгеброй Ли и имеет место один из следующих случаев:*

$$\dim A = 1:\ AA = 0;$$

$$\dim A = 2:\ \text{(a)}\ AA = 0,$$

$$\text{(b)}\ A = PE_1 + PE_2,\ E_1E_2 = E_2.$$

Доказательство. Предположим, что $\dim A = 2$ и $AA \neq 0$. Для произвольного базиса E_1, E_2 в A мы имеем $AA = PE_1E_2$, и можно выбрать элемент E_2 так, чтобы выполнялось равенство $AA = PE_2$. Тогда $E_1E_2 = aE_2$, где $a \in P$, $a \neq 0$. Заменяя E_1 элементом $a^{-1}E_1$, придем к равенству $E_1E_2 = E_2$. Легко видеть, что тождество Якоби в A справедливо. $\square$

Пусть теперь $\dim A = 3$ и E_1, E_2, E_3 — базис в A. Тогда матрица $s = (s_{ij}) \in \mathfrak{gl}(3, P)$, определенная равенствами

$$E^1 = E_2E_3 = s_{11}E_1 + s_{21}E_2 + s_{31}E_3,$$

$$E^2 = E_3E_1 = s_{12}E_1 + s_{22}E_2 + s_{32}E_3,$$

$$E^3 = E_1E_2 = s_{13}E_1 + s_{23}E_2 + s_{33}E_3$$

или, в матричной записи, равенством

(1) $(E^1, E^2, E^3) = (E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2) = (E_1, E_2, E_3)\, s,$

полностью определяет структуру алгебры A. Пусть $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$ — новый базис в A, для которого

(2) $(\bar{E}^1, \bar{E}^2, \bar{E}^3) = (\bar{E}_2\bar{E}_3, \bar{E}_3\bar{E}_1, \bar{E}_1\bar{E}_2) = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)\, \bar{s}.$

Обозначим через a невырожденную матрицу, удовлетворяющую условию

(3) $(E_1, E_2, E_3) = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)\, a.$

Тогда

$$\begin{aligned} E^1 = E_2E_3 &= (a_{12}\bar{E}_1 + a_{22}\bar{E}_2 + a_{32}\bar{E}_3)(a_{13}\bar{E}_1 + a_{23}\bar{E}_2 + a_{33}\bar{E}_3) = \\ &= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\,\bar{E}_2\bar{E}_3 + (a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33})\,\bar{E}_3\bar{E}_1 \\ &\quad + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\,\bar{E}_1\bar{E}_2. \end{aligned}$$

Пусть $a^* = (a^{ij})$ — матрица алгебраических дополнений к элементам матрицы a. Тогда, очевидно,

$$E^1 = a^{11}\bar{E}^1 + a^{12}\bar{E}^2 + a^{13}\bar{E}^3;$$

аналогично

$$E^2 = a^{21}\bar{E}^1 + a^{22}\bar{E}^2 + a^{23}\bar{E}^3,$$

$$E^3 = a^{31}\bar{E}^1 + a^{32}\bar{E}^2 + a^{33}\bar{E}^3.$$

Обозначая, как обычно, матрицу, транспонированную к a^*, через ${}^t a^*$, получаем

(4) $(E^1, E^2, E^3) = (\bar{E}^1, \bar{E}^2, \bar{E}^3)\cdot {}^t a^*.$

Из (1)—(4) следует, что $\bar{s}\cdot {}^t a^* = as$. С другой стороны, как известно, $aa^* = \det a \cdot 1$, где 1 — единичная матрица. Значит, $({}^t a^*)^{-1} = (\det a)^{-1}\cdot {}^t a$. Отсюда вытекает следующее утверждение:

(1.7.2) *Две антикоммутативные алгебры, заданные соотношениями* (1) *и* (2), *изоморфны тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица a, такая что*

$$\bar{s} = \frac{1}{\det a}\, a \cdot s \cdot {}^t a.$$

В случае $\dim A = 3$ антикоммутативная алгебра уже не обязана быть алгеброй Ли. Условие в терминах матрицы s, при котором A будет алгеброй Ли, дается следующим предложением:

(1.7.3) *Антикоммутативная алгебра, заданная соотношением* (1), *является алгеброй Ли тогда и только тогда, когда матрица s^* алгебраических дополнений к элементам матрицы s симметрична.*

Доказательство. Для того чтобы A была алгеброй Ли, достаточно, чтобы тождество Якоби выполнялось для элементов базиса. С другой стороны, так как всякая одномерная или двумерная антикоммутативная алгебра является алгеброй Ли, то в случае, когда какие-то из элементов X, Y, Z совпадают между собой, мы имеем

$$X(YZ) + Y(ZX) + Z(XY) = 0.$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием того, что A — алгебра Ли, служит равенство

$$E_1E^1 + E_2E^2 + E_3E^3 = 0.$$

С другой стороны, прямое вычисление дает

$$E_1E^1 + E_2E^2 + E_3E^3 = (s^{23} - s^{32}) E_1 + (s^{31} - s^{13}) E_2 +$$

$$+ (s^{12} - s^{21}) E_3. \ \square$$

Начиная с этого места и до конца параграфа мы будем рассматривать алгебры Ли L размерности 3, заданные соотношением (1). Ясно, что

$$\operatorname{rank} s = \dim [L, L].$$

Случай 0: $\operatorname{rank} s = 0$. В этом случае L абелева.

Случай 1: $\operatorname{rank} s = 1$ и $[L, L] = PE_3$. Если элемент E_3 содержится в центре, то $E^1 = E^2 = 0$ и $E^3 = aE_3$. Следовательно, заменяя E_1 на $a^{-1}E_1$, получаем

(1a) $[E_2, E_3] = [E_3, E_1] = 0, \quad [E_1, E_2] = E_3.$

Мы уже знаем, что это нильпотентная алгебра Ли.

Далее, если E_3 не принадлежит центру, то можно выбрать элемент E_2, для которого $[E_2, E_3] = E_3$. Тогда $PE_2 + PE_3$ — неабелева алгебра Ли размерности 2, являющаяся полной алгеброй (упр. 2 § 1.5). С другой стороны, $[L, PE_2 + PE_3] = PE_3 \subset PE_2 + PE_3$, и потому $PE_2 + PE_3$ — идеал в L. Следовательно, в силу (1.5.7), найдется такой элемент E_1, что $L = PE_1 \oplus (PE_2 + PE_3)$ есть прямая сумма идеалов. Таким образом,

(1b) $[E_2, E_3] = E_3, \ [E_3, E_1] = [E_1, E_2] = 0.$

Случай 2. $\operatorname{rank} s = 2 = \dim [L, L]$. Если $[L, L]$ не является абелевой алгеброй, то $[L, L]$ — прямое слагаемое и L должна иметь структуру (1b), что противоречит условию. Значит, алгебра $[L, L]$ абелева. В таком случае мы можем выбрать базис E_1, E_2, E_2, для которого

$$[E_2, E_3] = 0, \quad [E_1, E_2] = \alpha E_2 + \beta E_3,$$

$$[E_1, E_3] = \gamma E_2 + \delta E_3,$$

где $t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица. Обратно, для

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & -\delta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

матрица s^*, очевидно, симметрична, и s определяет алгебру Ли. Легко видеть, что алгебры Ли, определенные матрицами t и $\bar{t}$, изоморфны тогда и только тогда, когда существуют невырожденная матрица $b \in \mathfrak{gl}(2, P)$ и элемент $c \in P \setminus \{0\}$, такие что $\bar{t} = cbtb^{-1}$.

Если, в частности, $P = \overline{P}$, то можно выбрать t в одной из следующих форм:

(2a) $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$

$$[E_2, E_3] = 0, \quad [E_3, E_1] = -\alpha E_3, \quad [E_1, E_2] + E_2;$$

(2b) $t = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0,$

$$[E_2, E_3] = 0, \quad [E_3, E_1] = -E_3, \quad [E_1, E_2] = E_2 + \beta E_3.$$

Все эти алгебры Ли попарно неизоморфны.

Случай 3. Если матрица s невырожденна, то в силу формулы $ss^* = \det s \cdot 1$ она симметрична. Следовательно, $\sum_{i,\, j=1}^{3} s_{ij} x_i y_j = \varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ — невырожденная симметричная билинейная форма на P^3. Допустим, что $\operatorname{char} P \neq 2$. Тогда из условия $\varphi(v, v) = 0$ для всех $v \in P^3$ следовало бы, что $\varphi(v, w) = 0$ для всех $v, w \in P^3$, что невозможно. Поэтому мы можем найти элемент $v_1 \in P^3$, для которого $\varphi(v_1, v_1) \neq 0$. Из (1.5.1) вытекает теперь, что $P^3 = Pv_1 \oplus (Pv_1)^{\perp}$, причем ограничение формы φ на $(Pv_1)^{\perp}$ невырожденно. Рассуждая аналогичным образом, можно найти такие $v_1, v_2 \in P^3$, что $\varphi(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно,

выполняя при необходимости подходящее линейное преобразование пространства P^3, мы можем предполагать, что

$$s = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in P \setminus \{0\}.$$

В случае $P = \overline{P}$, полагая в (1.7.2)

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

получаем $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Итак, в этом случае

(3a) $[E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2, \quad [E_1, E_2] = E_3.$

Для $P = \mathbb{R}$, как легко показать,

(3a, b) $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1. Классифицировать при $P = \mathbb{R}$ алгебры L, для которых $\dim L = 3$, $\dim [L, L] = 0$.

Упражнение 2. Все алгебры Ли, отвечающие случаю 3, просты.

Упражнение 3. $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R}) \cong$ (3a), $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cong$ (3b).

1.8. Подалгебры Картана и разложения по корневым подпространствам

Пусть L — алгебра Ли над P. Подалгебра H в L называется *подалгеброй Картана*, если она нильпотентна и совпадает со своим нормализатором в L. (Напомним, что нормализатор алгебры H — это $\{X \in L\colon [X, H] \subset H\}$.)

Пусть теперь $P = \overline{P}$ и L — алгебра Ли над P. Предположим, что в L существует подалгебра Картана. Применяя (1.3.11) к представлению (L, ad) алгебры H, мы видим, что существуют различные функции $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ из H в P и подпространства $L(\alpha_0)$, $L(\alpha_1), \ldots, L(\alpha_k)$ в L, такие что

$$L = L(\alpha_0) \oplus \cdots \oplus L(\alpha_k)$$

и

$$L(\alpha) = \{Y \in L\colon \text{для всякого } X \in H \text{ существует целое число } e \geqslant 1, \text{ такое что } (\operatorname{ad} X - \alpha_i(X))^e Y = 0\}.$$

Так как подалгебра H нильпотентна, то для каждого $X \in H$ обобщенное собственное подпространство, отвечающее собственному значению 0, содержит H. Следовательно, мы можем считать, что $\alpha_0 \equiv 0$ и

$$L(\alpha_0) = L(0) = \{Y \in L\colon \text{для любого } X \in H \text{ существует целое число } e \geqslant 1, \text{ такое что } (\operatorname{ad} X)^e Y = 0\}.$$

Если $H \neq L(0)$, то существует такой элемент $s_0 \in L(0)$, что $s_0 \notin H$ и $[H, s_0] \subset H$ (в силу предложения (1.3.4), примененного к $L(0)/H$). Но в таком случае s_0 принадлежит нормализатору подалгебры H, совпадающему по предположению с H, — противоречие. Значит, $H = L(0)$.

Далее, согласно (1.2.2), $[L(\alpha_i), L(\alpha_j)]$ содержится в обобщенном собственном подпространстве эндоморфизма $\operatorname{ad} X$, отвечающем собственному значению $\alpha_i(X) + \alpha_j(X)$, для любого $X \in H$. Так как $L(\alpha_i + \alpha_j)$ представляет собой пересечение всех таких подпространств, то

$$[L(\alpha_i), L(\alpha_j)] \subset L(\alpha_i + \alpha_j).$$

Функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ называются *корнями*, а разложение

$$L = H \oplus L(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus L(\alpha_k)$$

— *разложением по корневым подпространствам* алгебры L относительно H.

Подалгебры Картана существуют, если поле P бесконечно. Доказательство этого потребует некоторых усилий, и мы начнем с того, что напомним следующий факт:

(1.8.1) *Пусть V — векторное пространство над P, $s \in \mathfrak{gl}(v)$ и $\chi \in P[t]$ — характеристический многочлен эндоморфизма s: $\chi(t) = \det(t1_V - s)$, где 1_V — тождественное отображение V на себя. Допустим, что $\chi(t) = \chi_1(t)\chi_2(t)$, где $\chi_1, \chi_2 \in P[t]$ — взаимно простые многочлены со старшим коэффициентом $+1$. Пусть $V_1 = \chi_2(s)V$ и $V_2 = \chi_1(s)V$. Тогда*

1) *V_1 и V_2 суть s-инвариантные подпространства в V и $V = V_1 \oplus V_2$;*

2) *характеристический многочлен эндоморфизма $s|_{V_i}$ равен $\chi_i(t)$.*

Начиная с этого места и до конца параграфа мы будем предполагать, что P — бесконечное поле. Пусть L — алгебра Ли над P и $X_1, \ldots, X_n$ — базис в L. Пусть, далее, $P(u) = P(u_1, \ldots, u_n)$ обозначает поле рациональных функций от n переменных $u_1, \ldots, u_n$ над P. Построим алгебру Ли $L^{P(u)}$ над $P(u)$ и положим

$$X_u = u_1X_1 + \cdots + u_nX_n \in L^{P(u)}.$$

Обозначим через $\chi(t, u)$ характеристический многочлен эндоморфизма $\mathrm{ad}\ X_u$. Тогда $\chi(t, u) = t^n + g_{n-1}(u)\,t^{n-1} + \ldots + g_0(u)$, где все $g_j(u)$ суть полиномы от $u_1, \ldots, u_n$. Так как $(\mathrm{ad}\ X_u)\,X_n = 0$, то $g_0(u) = 0$. Следовательно, существует номер l, такой что $g_0(u) = \ldots = g_{l-1}(u) = 0$ и $g_l(u) \neq 0$. Поэтому 0 является собственным значением кратности $\geqslant l$ для каждого эндоморфизма $\mathrm{ad}\ X$ $(X \in L)$, и если $g_l(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, то 0 является собственным значением кратности l для $\mathrm{ad}\,(a_1X_1 + \ldots + a_nX)$. Такие элементы $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ мы будем называть *регулярными элементами* алгебры L. Поскольку поле P бесконечно, регулярные элементы существуют. Таким образом, l — это наименьшая из кратностей собственного значения 0 эндоморфизмов $\mathrm{ad}\ X$ $(X \in L)$; число l называется *рангом* алгебры L: $\mathrm{rank}\ L = l$. Пусть $\widetilde{P}$ — расширение поля P. Легко видеть, что $\mathrm{rank}\ L = \mathrm{rank}\ L^{\widetilde{P}}$.

(1.8.2) *Пусть P — бесконечное поле, L — алгебра Ли ранга l над P и X — регулярный элемент алгебры L. Предположим, что $\chi(t) = t^l\chi^*(t)$, где $\chi^*(0) \neq 0$ — характеристической многочлен эндоморфизма* $\mathrm{ad}\ X$. *Пусть*

$$L^0 = \chi^*(\mathrm{ad}\ X)\,L, \qquad L^* = (\mathrm{ad}\ X)^l\,L.$$

Тогда

1) $L = L_0 \oplus L^*$ (*прямая сумма векторных пространств*);
2) L_0 *есть подалгебра Картана размерности l;*
3) $[L_0, L^*] = [X, L^*] = L^*$.

Доказательство. Поскольку t^l и $\chi^*(t)$ взаимно просты $(\chi^*(0) \neq 0)$, мы можем применить (1.8.1) к эндоморфизму $\mathrm{ad}\ X$ и заключить, что $L = L_0 \oplus L^*$, $[X, L_0] \subset L_0$ и $[X, L^*] \subset L^*$. Далее, $\chi^*(t)$ является характеристическим многочленом эндоморфизма $\mathrm{ad}\ X|_*$, и так как $\chi^*(0) \neq 0$, то $(\mathrm{ad}\ X)\,L^* = L^*$. С другой стороны, $\mathrm{ad}\ X|_{L_0}$ имеет характеристическим многочленом t^l, поэтому $\dim L_0 = l$ и L_0 есть обобщенное собственное подпространство для $\mathrm{ad}\ X$ с собственным значением 0. В частности, $X \in L_0$.

Расширим поле P до $\overline{P}$ и рассмотрим разложение $L^{\overline{P}} = L_0^{\overline{P}} \oplus L^{*\overline{P}}$. Так как $(\mathrm{ad}\ X)\,L^* = L^*$, то

$$L^{*\overline{P}} = \overline{L}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \overline{L}(\alpha_k),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — различные собственные значения эндоморфизма $\mathrm{ad}\ X\big|_{L^{*\overline{P}}}$. Все α_j отличны от 0, поскольку $\mathrm{ad}\ X|_{L^*}$ невырожден.

Согласно (1.2.2), имеем

$$\left[L_0^{\overline{P}}, L_0^{\overline{P}}\right] \subset L_0^{\overline{P}} \quad \text{и} \quad \left[L_0^{\overline{P}}, \overline{L}(\alpha_j)\right] \subset \overline{L}(\alpha_j).$$

Следовательно, $[L_0, L_0] \subset L_0$ и $[L_0, L^*] \subset L^*$.

Пусть теперь Y — элемент из нормализатора подалгебры L_0. Тогда $[X, Y] \in L_0$ и потому $(\operatorname{ad} X)^{l+1} Y = (\operatorname{ad} X)^l [X, Y] = 0$. Значит, $Y \in L_0$ и L_0 совпадает со своим нормализатором.

Докажем, наконец, что подалгебра L_0 нильпотентна. Обозначим через $P(v) = P(v_1, \ldots, v_l)$ поле рациональных функций от l переменных $v_1, \ldots, v_l$ над P и построим $L^{P(v)}$. Пусть $H_1, \ldots, H_l$ — какой-нибудь базис в L_0 и

$$H = v_1H_1 + \cdots + v_lH_l \in L_0^{P(v)}.$$

Так как $[H_i, L_0] \subset L_0$ и $[H_i, L^*] \subset L^*$, то

$$[H, L_0^{P(v)}] \subset L_0^{P(v)}, \quad [H, L^{*P(v)}] \subset L^{*P(v)}.$$

Пусть $\chi_0(t, v)$ и $\chi^*(t, v)$ — характеристические многочлены преобразований $H\big|_{L_0^{P(v)}}$ и $H\big|_{L^{*P(v)}}$ соответственно. Запишем регулярный элемент X в виде $X = a_1H_1 + \ldots + a_lH_l$ $(a_i \in P)$. Тогда $\chi^*(0, v) \neq 0$, поскольку эта функция принимает ненулевое значение при $v = (a_1, \ldots, a_l)$. С другой стороны, из того что $L^{P(v)}$ имеет ранг l, следует, что $\chi_0(t, v)$ должен делиться на t^l. Значит, $\chi_0(t, v) = t^l$ и каждый элемент $H_b = b_1H_1 + \ldots + b_lH_l \in L_0$ удовлетворяет соотношению $(\operatorname{ad} H_b)^l L_0 = 0$. Следовательно, алгебра L_0 нильпотентна по теореме Энгеля (1.3.7). □

Упражнение 1. Показать, что всякая подалгебра Картана является максимальной нильпотентной алгеброй. $\left(\text{Обратное неверно: рассмотрите } \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Упражнение 2. Показать, что если H — подалгебра Картана в L, то $H^{\widetilde{P}}$ — подалгебра Картана в $L^{\widetilde{P}}$.

Упражнение 3. Пусть $\operatorname{diag}(n, P) = \{(s_{ij}) \ \mathfrak{gl}(n, P) \colon s_{ij} = 0, \ i \neq j\}$. Показать, что $\operatorname{diag}(n, P)$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{gl}(n, P)$. Показать, что если элемент $X \in \operatorname{diag}(n, P)$ имеет различные собственные значения, то он регулярен.

1.9. Универсальная обертывающая алгебра

В этом параграфе мы свяжем с каждой алгеброй Ли L некоторую ассоциативную алгебру $U(L)$ (бесконечной размерности), такую что представлениям L взаимно-однозначно соответствуют представления $U(L)$. Алгебра $U(L)$ служит мощным средством изучения представлений алгебры L.

В этом и следующем параграфах мы будем считать, что рассматриваемые векторные пространства и алгебры могут иметь бесконечную размерность (временно отступая от принятого нами соглашения), что рассматриваемые ассоциативные алгебры имеют единицу, обозначаемую всегда символом 1, и что гомоморфизмы одной ассоциативной алгебры в другую переводят 1 в 1. Для

данного векторного пространства V (возможно, бесконечномерного) мы будем обозначать через $\mathrm{End}(V)$ ассоциативную алгебру всех его эндоморфизмов. Трактуя $\mathrm{End}(V)$ как алгебру Ли относительно скобочного умножения $[s, t] = st - ts$, мы будем обозначать ее $\mathfrak{gl}(V)$. Представление (V, f) ассоциативной алгебры A — это гомоморфизм из A в $\mathrm{End}(V)$, где V — *конечномерное* пространство.

Мы начнем с того, что напомним основные свойства тензорных произведений.

Пусть P — поле и $V_1, \ldots, V_r$, W — векторные пространства над P. Всякое r-линейное отображение $f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_r \to W$ определяет единственное линейное отображение $f^*: V_1 \otimes \ldots \otimes V_r \to W$, удовлетворяющее условию $f^*(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = f(v_1, \ldots, v_r)$ для всех $v_i \in V_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Пусть V — векторное пространство над P. *Тензорная алгебра* (*свободная алгебра*) над V, обозначаемая через $T(V)$, — это векторное пространство

$$P \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots \oplus (\underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{r\ \text{раз}}) \oplus \cdots$$

вместе с операцией умножения, продолжающей естественные отображения

$$(\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\ \text{раз}}) \times (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s\ \text{раз}}) \to \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r+s\ \text{раз}},$$

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \times (w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s.$$

Ясно, что $T(V)$ — ассоциативная алгебра над P.

(1.9.1) *Пусть V — векторное пространство над P, A — ассоциативная алгебра над P и $f: V \to A$ — линейное отображение. Существует единственный изоморфизм алгебр $f^*: T(V) \to A$, продолжающий f, такой что*

$$f^*(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = f(v_1) \cdots f(v_r) \quad (v_i \in V).$$

Доказательство. Пусть $f_r: V \times \ldots \times V$ (r раз) $\to A$ есть r-линейное отображение, определенное формулой

$$f_r(v_1, \ldots v_r) = f(v_1) \cdots f(v_r).$$

Тогда существует единственное линейное отображение f_r^* $(V \otimes \ldots \otimes V)$ (r раз) $\to A$, для которого $f_r^*(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = f_r(v_1, \ldots, v_r)$. Комбинируя отображение $f_0^*: P \to P$, удовлетворяющее условию $f_0^*(1) = 1$, с отображениями f_r^*, мы получим линейное отображение $f^*: T(V) \to A$. Чтобы доказать, что f^* — гомоморфизм, достаточно проверить, что $f^*(x \otimes y) = f^*(x) f^*(y)$ для $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$ и $y = y_1 \otimes \ldots \otimes y_s$. Но это сразу следует из определения отображения f^*, равно как и единственность отображения f^*. $\square$

(1.9.2) *Пусть* $\delta \in \operatorname{End}(V)$. *Тогда существует единственное дифференцирование* δ^* *алгебры* $T(V)$, *для которого* $\delta^* v = \delta v$ *при* $v \in V$.

Доказательство. Определим r-линейное отображение

$$\delta_r : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ раз}} \to \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ раз}},$$

полагая

$$\delta_r(v_1, \ldots, v_r) = \sum_{j=1}^{r} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes \delta v_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_r.$$

Далее рассуждаем, как при доказательстве (1.9.1). □

Пусть L — алгебра Ли. Рассматривая на L лишь структуру векторного пространства, образуем тензорную алгебру $T(L)$. Пусть I — двусторонний идеал в $T(L)$, порожденный элементами $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ для всех $X, Y \in L$. *Универсальная обертывающая алгебра* алгебры L — это ассоциативная алгебра $T(L)/I$. Мы будем обозначать $T(L)/I$ через $U(L)$, а умножение в $U(L)$ записывать в виде $(u, v) \mapsto uv$ $(u, v \in U(L))$. Отображение $L \to T(L)$ порождает линейное отображение π: $L \to U(L)$.

(1.9.3) *Пусть* L *— алгебра Ли над* P, A *— ассоциативная алгебра над* P. *Если* $f: L \to A$ *— линейное отображение, удовлетворяющее условию* $f([X, Y]) = f(X)f(Y) - f(Y)f(X)$ *для всех* $X, Y \in L$ *(т. е.* f *— гомоморфизм алгебры* L *в алгебру Ли* A*), то существует единственный гомоморфизм* f^*: $U(L) \to A$, *для которого* $f^* \circ \pi = f$. *Обратно, если* f^*: $U(L) \to A$ *— гомоморфизм, то* $f^* \circ \pi$: $L \to A$ *— гомоморфизм алгебр Ли.*

Доказательство. Линейное отображение f: $L \to A$ продолжается до гомоморфизма алгебр f^*: $T(L) \to A$, согласно (1.9.1). Далее, ядро гомоморфизма f^* содержит I, поскольку

$$f^*(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]) = f(X)f(Y) - f(Y)f(X) - f([X, Y]) = 0.$$

Следовательно, f^* порождает гомоморфизм $U(L) \to A$, обладающий требуемым свойством; этот гомоморфизм определен однозначно, поскольку $\pi(L)$ порождает $U(L)$. Доказательство обратного утверждения еще проще, и мы его опустим. □

В том частном случае, когда $A = \operatorname{End}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство, предложение (1.9.3) устанавливает обещанное взаимно-однозначное соответствие между представлениями алгебр L и $U(L)$.

(1.9.4) *Пусть L — алгебра Ли над P и δ — ее дифференцирование. Тогда существует единственное дифференцирование δ^* алгебры $U(L)$, для которого $\delta^* \circ \pi = \pi \circ \delta$.*

Доказательство. Согласно (1.9.2), δ продолжается до некоторого дифференцирования δ^* алгебры $T(L)$. Далее, при $X, Y \in L$

$$\delta^*(X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y])$$

$$= (\delta X \otimes Y + X \otimes \delta Y) - (\delta Y \otimes X + Y \otimes \delta X) - ([\delta X, Y] + [X, \delta Y])$$

$$= (\delta X \otimes Y - Y \otimes \delta X - [\delta X, Y]) + (X \otimes \delta Y - \delta Y \otimes X - [X, \delta Y]),$$

т. е. $\delta^* I \subset I$. Отсюда следует, что δ^* порождает дифференцирование алгебры $U(L)$, обладающее требуемым свойством. □

(1.9.5) *Пусть L — алгебра Ли над полем P, имеющая базис $X_1, \ldots, X_n$. Множество всех элементов вида*

$$(*) \qquad \pi(X_1)^{e_1} \cdots \pi(X_n)^{e_n},$$

где e_i — произвольные неотрицательные целые числа, образует базис в $U(L)$.

Для экономии места мы лишь наметим доказательство этой теоремы, известной под названием *теоремы Пуанкаре — Брикгоффа—Витта.* Подробное доказательство можно найти, например, в книге [Джекобсон].

Набросок доказательства. Множество $\pi(L)$ порождает $U(L)$ и состоит из линейных комбинаций элементов $\pi(X_1), \ldots, \pi(X_n)$. Мы хотим показать, что элемент $\pi(X_{i_1}) \ldots \pi(X_{i_k})$ из $U(L)$ является линейной комбинацией элементов вида $(*)$, для которых $e_1 + \ldots + e_n \leqslant k$. Доказательство проводится индукцией по k, причем случай $k = 1$ очевиден. Рассмотрим шаг индукции $k \to k+1$ и элемент $\pi(X_{i_1}) \ldots \pi(X_{i_{k+1}})$. Докажем индукцией по i_1, что этот элемент представим в виде линейной комбинации элементов вида $(*)$, для которых $e_1 + \ldots + e_n \leqslant k+1$. Если $i_1 = 1$, то применяем предположение индукции к элементу $\pi(X_{i_2}) \ldots \pi(X_{i_{k+1}})$ и получаем, что $\pi(X_1)\pi(X_{i_2}) \ldots \pi(X_{i_{k+1}})$ есть линейная комбинация элементов вида

$$\pi(X_1)\pi(X_1)^{e_1} \ldots \pi(X_n)^{e_n}, \quad e_1 + \ldots + e_n \leqslant k.$$

Для произвольного $i_1 = i > 1$ мы видим снова, что $\pi(X_i) \cdot \pi(X_{i_2}) \ldots \pi(X_{i_{k+1}})$ является линейной комбинацией элементов вида

$$\pi(X_i)\pi(X_j)^{e_j}\pi(X_{j+1})^{e_{j+1}} \ldots \pi(X_n)^{e_n}, \quad e_j + \ldots + e_n \leqslant k.$$

Если в этом выражении $i \leqslant j$, то наше утверждение доказано. В противном случае $i > j$ и

$$\pi(X_i)\pi(X_j)^{e_j}\ldots\pi(X_n)^{e_n} = \pi(X_i)\pi(X_j)\pi(X_j)^{e_j-1}\ldots\pi(X_n)^{e_n}$$
$$= [\pi(X_i),\ \pi(X_j)]\,\pi(X_j)^{e_j-1}\ldots\pi(X_n)^{e_n}$$
$$+\pi(X_j)\pi(X_i)\pi(X_j)^{e_j-1}\ldots\pi(X_n)^{e_n}.$$

Здесь первое слагаемое представляет собой линейную комбинацию требуемого вида, поскольку наше утверждение уже доказано для k, а второе — поскольку $j < i$.

Доказательство линейной независимости элементов вида (*) проводится непосредственным образом. Пусть $\mathbb{Z}_0$ — множество всех неотрицательных целых чисел и $\mathbb{Z}_0^n$ — совокупность всех n-наборов элементов из $\mathbb{Z}_0$. Обозначим через V^n векторное пространство всех функций из $\mathbb{Z}_0^n$ в P, отличных от нуля лишь в конечном числе точек. Мы можем рассматривать V^n как множество всех конечных сумм вида $\sum a_{e_1\ldots e_n}(e_1, \ldots, e_n)$, где $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{Z}_0^n$ и $a_{e_1\ldots e_n} \in P$. Введем обозначение $\varepsilon_i = (0, \ldots, 0,\ 1,\ 0, \ldots, 0)$ (1 на i-м месте). Решающий момент доказательства состоит в введении умножения в V^n, относительно которого V^n становится ассоциативной алгеброй, причем $(e_1, \ldots, e_n) = \varepsilon_1^{e_1}\ldots\varepsilon_n^{e_n}$, и если

$$[X_i,\ X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}X_k,$$

то

$$\varepsilon_i\varepsilon_j - \varepsilon_j\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}\varepsilon_k.$$

Это можно сделать по индукции, в несколько приемов. Обозначим полученную алгебру через $V(L)$.

Так как отображение $f\colon L \to V(L)$, определенное условиями $f(X_i) = \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, l$, является гомоморфизмом, то, согласно (1.9.3), существует гомоморфизм $f^*\colon U(L) \to V(L)$, такой что $f^* \circ \pi = f$. Поскольку

$$f^*\left(\pi(X_1)^{e_1}\ldots\pi(X_n)^{e_n}\right) = (e_1,\ \ldots,\ e_n),$$

линейная независимость элементов из $\mathbb{Z}_0^n$ в V^n влечет за собой линейную независимость элементов вида (*). □

Замечание. Теорема (1.9.5) утверждает, в частности, что отображение $\pi\colon L \to U(L)$ взаимно-однозначно. Используя это, мы будем в дальнейшем отождествлять L с $\pi(L) \subset U(L)$ с помощью отображения π.

(1.9.6) *Пусть L — алгебра Ли над P. Если I и J — идеалы в $U(L)$, имеющие конечную коразмерность, то идеал IJ также имеет конечную коразмерность.*

Доказательство. Пусть X принадлежит L. Можно найти положительные целые числа s, t, такие что

$$X^s - a_{s-1}X^{s-1} - \cdots - a_0 \in I,$$

$$X^t - b_{t-1}X^{t-1} - \cdots - b_0 \in J$$

при некоторых $a_j, b_j \in P$. Следовательно, X^{s+t} является линейной комбинацией элементов $1, X, \ldots, X^{s+t-1}$ по модулю идеала IJ. Отсюда вытекает, что все X^k, $k \geqslant s+t$, также являются линейными комбинациями элементов $1, X, \ldots, X^{s+t-1}$ по модулю IJ.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — какой-нибудь базис в L. Каждый элемент

$$(*) \quad X_1^{e_1} \ldots X_n^{e_n}, \quad e_i \in \mathbb{Z}_0,$$

можно записать по модулю идеала IJ в виде линейной комбинации элементов

$$X_1^{d_1} \ldots X_n^{d_n} \quad (0 \leqslant d_i \leqslant s_i + t_i),$$

где числа s_i и t_i выбраны аналогично предыдущему. Но элементы $(*)$ порождают $U(L)$, в силу (1.9.5). □

Упражнение 1. Пусть L — абелева алгебра Ли размерности n. Тогда алгебра $U(L)$ изоморфна кольцу многочленов от n переменных.

Упражнение 2. Алгебра $U(L)$ не имеет делителей нуля.

1.10. Существование точных представлений

Цель этого параграфа — доказательство следующей теоремы:

(1.10.1) Теорема. *Пусть L — алгебра Ли конечной размерности над полем P характеристики 0 и N — ее ниль-радикал. Существует точное представление (V, f) алгебры L, такое что $f(N)$ состоит из нильпотентных линейных преобразований.*

Логичнее было бы поместить доказательство этой теоремы в конце гл. 3, так как оно основано на разложении Леви и некоторых результатах гл. 2. Однако мы докажем ее здесь, предполагая справедливость указанных результатов, поскольку 1) эта теорема превосходно иллюстрирует значение универсальной обертывающей алгебры и 2) она будет использована лишь при доказательстве одного факта о группах Ли (6.7.1).

Известно несколько доказательств теоремы (1.10.1), принадлежащих И. Д. Адо, Э. Картану, Хариш-Чандре, К. Ивасаве и другим. Мы будем следовать методу Х. Цассенхауза. Для удобства разобьем параграф на четыре пункта.

(А) Начнем с одного элементарного факта теории ассоциативных алгебр. (Напомним, что ассоциативные алгебры у нас всегда содержат 1.)

(1.10.2) *Пусть A — ассоциативная алгебра. Для всякого $x \in A$ определим $L(x)$, оператор левого умножения на x, формулой $L(x)u = xu$ при $u \in A$. Тогда отображение*

$$A \ni x \longmapsto L(x) \in \mathrm{End}(A)$$

есть взаимно-однозначный гомоморфизм.

Доказательство. Отображение L является гомоморфизмом, поскольку для любых x, y, $u \in A$

$$L(x)L(y)u = L(x)(yu) = x(yu) = (xy)u = L(xy)u.$$

Далее, гомоморфизм L взаимно-однозначен, так как $L(x) = 0$ влечет $L(x)1 = x = 0$. □

Что можно сказать о правом умножении $R(x)$: $u \to ux$? В этом случае имеем $R(x)R(y) = R(yx)$, т. е. R не является гомоморфизмом. Коснемся попутно вопроса: почему для нас удобно левое умножение и неудобно правое? Ответ прост: потому что мы записываем операторы из $\mathrm{End}(A)$ слева. Давайте записывать операторы из $\mathrm{End}(A)$ справа, а не слева, как мы привыкли; если обозначать образ элемента $y \in A$ при отображении $s \in \mathrm{End}(A)$ через ys, то мы получим, что отображение $x \to R(x)$ — гомоморфизм.

Пусть L — алгебра Ли над P, $U(L)$ — ее универсальная обертывающая алгебра и $\mathrm{End}(U(L))$ обозначает ассоциативную алгебру всех линейных преобразований векторного пространства $U(L)$. Мы записываем образ элемента $u \in U(L)$ при отображении $s \in \mathrm{End}(U(L))$ в виде us, т. е. рассматриваем $U(L)$ как правый $\mathrm{End}(U(L))$-модуль. Для x, y, $u \in U(L)$, определяя $R(x)$ формулой $uR(x) = ux$, имеем $R(x)R(y) = R(xy)$.

Обозначим через $U(L)^*$ пространство, сопряженное к $U(L)$, т. е. $U(L)^*$ — векторное пространство, состоящее из всех линейных отображений $U(L)$ в P. Для $x, y \in U(L)$ и $\lambda \in U(L)^*$ определим $R^*(x)$ равенством $(R^*(x)\lambda)(y) = \lambda(yx)$. Ясно, что отображение $U(L) \ni x \to R^*(x) \in \mathrm{End}(U(L)^*)$ — гомоморфизм. Опуская символ R^*, получаем

$$(*) \quad (x\lambda)(y) = \lambda(yx) \quad \text{при } x,\ y \in U(L) \text{ и } \lambda \in U(L)^*.$$

Таким образом, $U(L)^*$ становится левым $U(L)$-модулем.

Далее, пусть $\mathrm{der}(L)$ обозначает алгебру Ли всех дифференцирований алгебры L. Будем рассматривать L как правый $\mathrm{der}(L)$-модуль. Согласно (1.9.4), каждый элемент δ алгебры $\mathrm{der}(L)$ единственным образом продолжается до дифференцирования $\tilde{\delta}$ алгебры $U(L)$. Для любых δ_1, $\delta_2 \in \mathrm{der}(L)$ мы имеем $[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2] = \tilde{\delta}_1\tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_2\tilde{\delta}_1$.

Следовательно, ограничение отображения $[\tilde\delta_1, \tilde\delta_2]$ на L совпадает с $\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 = [\delta_1, \delta_2]$. Таким образом, с помощью изоморфизма $\operatorname{der}(L) \ni \delta \to \tilde\delta \in \operatorname{der}(U(L))$ алгебра Ли $\operatorname{der}(L)$ может быть вложена в $\operatorname{der}(U(L))$.

(1.10.3) *Пусть G — алгебра Ли, H — подалгебра, а L — идеал в G, такие что $G = H \oplus L$. Пусть, далее, $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры L. Для $X \in H$ обозначим через $\delta(X)$ дифференцирование алгебры $U(L)$, определенное равенством $Z \cdot \delta(X) = [Z, X]$ при $Z \in L$. Тогда формула*

$$\rho(X + Y) = \delta(X) + R(Y) \text{ для } X \in H,\ Y \in L$$

задает гомоморфизм из G в $\mathfrak{gl}(U(L))$ (т. е. в алгебру $\operatorname{End}(U(L))$, рассматриваемую как алгебра Ли).

Доказательство. Так как $R: U(L) \ni y \to R(y) \in \operatorname{End}(U(L))$ — гомоморфизм, то $R: L \ni Y \to R(Y) \in \mathfrak{gl}(U(L))$ — гомоморфизм алгебр Ли.

Из тождества Якоби, следует, что для любых $X_1, X_2 \in H$

$$\delta([X_1, X_2]) = [\delta(X_1), \delta(X_2)]$$

на L. Следовательно, это равенство выполняется тождественно на $U(L)$. Таким образом,

$$\delta: H \ni X \longmapsto \delta(X) \in \mathfrak{gl}(U(L))$$

— гомоморфизм алгебр Ли.

Далее, пусть $X \in H$, $Y \in L$ и $x \in U(L)$. Тогда

$$\begin{aligned} x[\delta(X), R(Y)] &= x\delta(X)\cdot Y - (xY)\cdot\delta(X) \\ &= x\delta(X)\cdot Y - x\delta(X)\cdot Y - x(Y\delta(X)) \\ &= -x[Y, X] = xR([X, Y]), \end{aligned}$$

т. е. $[\delta(X), R(Y)] = R([X, Y])$, или $[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y])$. □

(B) Пусть V — векторное пространство над P и (V, f) — представление алгебры L. Будем обозначать продолжение этого представления до гомоморфизма алгебры $U(L)$ в $\operatorname{End}(V)$ снова через f. (Впоследствии аналогичные замечания мы будем опускать.) Пусть $\operatorname{End}(V)^*$ — пространство, сопряженное к $\operatorname{End}(V)$. Под *представляющей* функцией, ассоциированной с представлением f, мы будем подразумевать функцию $U(L) \to P$ вида $\lambda \circ f$, где $\lambda \in \operatorname{End}(V)^*$. Обозначим через $R(f)$ совокупность всех таких функций:

$$R(f) = \{\lambda \circ f : \lambda \in \operatorname{End}(V)^*\} \subset U(L)^*.$$

Очевидно, что $R(f)$ — конечномерное векторное пространство.

Пусть x и y принадлежат $U(L)$, а $\lambda \in \mathrm{End}(V)^*$. В силу (*), $(x(\lambda \circ f))(y) = (\lambda \circ f)(yx) = \lambda(f(yx)) = \lambda(f(y)f(x))$. Положим $\theta(s) = \lambda(sf(x))$ при $s \in \mathrm{End}(V)$. Тогда

$$x(\lambda \circ f) = \theta \circ f \quad \text{и} \quad \theta \in \mathrm{End}(V^*).$$

Следовательно, $x(\lambda \circ f) \in R(f)$, т. е. $R(f)$ *инвариантно относительно* $U(L)$ при действии (*).

(1.10.4) *Пусть L — алгебра Ли над P, V — векторное пространство размерности m над P и (V, f) — представление алгебры L. Существует взаимно-однозначный гомоморфизм*

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m): V \to mR(f) = R(f) \oplus \cdots \oplus R(f) \quad (m \text{ раз}),$$

такой что

$$\varphi(f(x)v) = (x \cdot \varphi_1(v), \ldots, x \cdot \varphi_m(v))$$

для $v \in V$ и $x \in (L)$.

Короче говоря, естественное представление алгебры L (или $U(L)$) в пространстве $mR(f)$ содержит данное представление (V, f).

Доказательство. Так как $\dim V = m < \infty$, то $\dim V^* = m$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — базис в V^*. Определим φ_i: $V \to R(f)$ формулой

$$\varphi_i(v)x = \lambda_i(f(x)v), \quad x \in U(L),$$

для $i = 1, \ldots, m$. Если $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_m(v)) = 0$, то $\varphi_i(v)(1) = \lambda_i(v) = 0$ для всех i и потому $v = 0$. Следовательно, отображение φ взаимно-однозначно.

Далее, имеем

$$(x \cdot \varphi_i(v))(y) = \varphi_i(v)(yx) = \lambda_i(f(yx)v),$$
$$(\varphi_i(f(x)v))(y) = \lambda_i(f(y)f(x)v) = \lambda_i(f(yx)v)$$

$(i = 1, \ldots, m)$ и $\varphi(f(x)v) = (x\varphi_1(v), \ldots, x\varphi_m(v))$. □

(C) Прежде чем приступать к наиболее существенной части доказательства, докажем одну лемму.

(1.10.5) *Пусть G — алгебра Ли, L — ее идеал и (V, ψ) — ее вполне приводимое представление. Если $\psi(L)$ состоит из нильпотентных преобразований, то $\psi(L) = 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $V \neq 0$. Положим $W = \{v \in V: \psi(L)v = 0\}$. Ясно, что $W \neq 0$ (в силу (1.3.4)) и $\psi(G)W \subset W$ (в силу (1.3.3)). Ввиду полной приводимости существует подпространство W' в V, такое что $V = W \oplus W'$ и $\psi(G)W' \subset W'$. Так как для каждого $Y \in L$ ограничение преобразования $\psi(Y)$ на W' также нильпотентно, то проведенное выше рассуждение применимо к W'. Поэтому если $W' \neq 0$, то $W \cap W' \neq 0$, — противоречие. Итак, $W' = 0$. □

Перейдем теперь к решающей части доказательства.

(1.10.6) (Цассенхауз) *В предположениях теоремы* (1.10.3), *пусть* (V, f) — *представление алгебры* L, *а* (V, f') — *ассоциированное с ним вполне приводимое представление. Допустим, что* $f'([H, L]) = 0$. *Тогда можно найти представление* (W, F) *алгебры* G, *удовлетворяющее следующим условиям*:

(i) $V \subset W$ и $f(Y) = F(Y)$ *на* V *для всех* $Y \in L$.

(ii) *Обозначим через* (W, F') *вполне приводимое представление, ассоциированное с* F. *Тогда* $\ker F' \supset \ker f'$.

(iii) *Если эндоморфизм* $\operatorname{ad} X|_L$ *нильпотентен для всех* $X \in H$, *то* $F'(H) = 0$.

Доказательство. Обозначим представления алгебры $U(L)$, отвечающие представлениям f и f' алгебры L, снова через f и f'. Далее, обозначим через I и I' соответственно ядра представлений f и f' в $U(L)$. Пусть $0 = V_0 \underset{\neq}{\subset} V_1 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} V_k = V$ — композиционный ряд $f(L)$-инвариантных подпространств. Заметим, что он является также композиционным рядом $f(U(L))$-инвариантных подпространств, поскольку L порождает $U(L)$. Пусть $m_j = \dim V_j - \dim V_{j-1}$ для $j = 1, \ldots, k$. Тогда, выбирая подходящий базис в V, эндоморфизмы $f(x)$, $x \in I'$, можно одновременно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 0_1 & & & * \\ & 0_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0_k \end{pmatrix},$$

где 0_j обозначает $m_j \times m_j$-матрицу, состоящую из одних нулей, и $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$. Для любых $x_1, \ldots, x_m \in I'$ мы имеем $f(x_1 \ldots x_m) = f(x_1) \ldots f(x_m) = 0$, и потому $(I') \subset I$.

Пусть ρ: $U(G) \to \operatorname{End}(U(L))$ — продолжение построенного в (1.10.3) гомоморфизма ρ алгебры G в $\mathfrak{gl}(U(L))$. Так как I' — идеал в $U(L)$, то $I'\rho(L) = I'L \subset I'$. Аналогично из равенства $f'([H, L]) = 0$ получаем, что $I\rho(H) \subset I'$. Следовательно, $I'\rho(G) \subset I'$ и потому $(I')^m \rho(G) \subset (I')^m$. Значит, $(I')^m$ есть $\rho((G))$-инвариантное подпространство в $U(L)$. Положим $S = U(L)/(I')^m$. Так как I' имеет конечную коразмерность в $U(L)$, то, согласно (1.9.6), тем же свойством обладает $(I')^m$.

Итак, S является конечномерным векторным пространством и в то же время правым $U(G)$-модулем. Это означает, что отображение

$$U(G) \ni x \longmapsto \rho_0(x) \in \operatorname{End}(S),$$

где $(y + (I')^m)\,\rho_0(x) = y\rho(x) + (I')^m$ при $y \in U(L)$, задает некоторое представление (S, ρ_0) алгебры $U(G)$.

Пусть $R(f)$ — векторное пространство всех представляющих функций, ассоциированных с представлением f. Поскольку $(I')^m \subset \ker f$, $R(f)$ можно отождествить с некоторым подпространством в S^*, сопряженном к S. Положим $W = mS^* = S^* \oplus \ldots \oplus S^*$ (m раз). Тогда мы имеем следующую последовательность взаимно-однозначных линейных отображений: $V \to mR(f) \to mS^* = W$. Полагая $(\rho_0^*(X)\,\mu)(s) = \mu(s\rho_0(X))$ для $X \in G$, $s \in S$, $\mu \in S^*$, мы получим некоторое представление $\rho_0^*\colon G \to \mathfrak{gl}(S^*)$. Обозначим через F представление алгебры G в W, задаваемое формулой $F = \rho_0^* \oplus \ldots \oplus \rho_0^*$ (m раз). Из нашего построения вытекает, ввиду (1.10.4), что (W, F) удовлетворяет условию (i).

Далее, поскольку $\rho_0((I')^m) = 0$, то $\rho_0^*((I')^m) = 0$ и $F((I')^m) = 0$. Следовательно, для любого Y из подпространства $I' \cap L$, совпадающего с ядром представления $f'\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$, эндоморфизм $F(Y)$ нильпотентен, а значит и $F'(Y)$ нильпотентен. Так как представление F' вполне приводимо, то $F'(Y) = 0$, согласно (1.10.5). Тем самым доказано (ii).

Наконец, предположим, что $\operatorname{ad} X|_L$ является нильпотентным эндоморфизмом для каждого $X \in H$. Пусть $\delta(X)$ — дифференцирование алгебры $U(L)$, определенное формулой $Y \cdot \delta(X) = [Y, X]$ при $Y \in L$. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$U_k(L) = P + L + L^2 + \cdots + L^k \subset U(L),$$

где $L^2 = L \cdot L$, $L^3 = L^2 \cdot L$, ... Тогда $U_k(L) \cdot \delta(X) \subset U_k(L)$, и эндоморфизм $\delta(X)$ нильпотентен на $U_k(L)$. С другой стороны, поскольку $(I')^m$ имеет конечную коразмерность в $U(L)$, найдется такой номер k, что $U_k(L) + (I')^m = U(L)$. Следовательно, существует натуральное число r, для которого $U(L) \cdot \delta(X)^r \subset (I')^m$ $\rho_0(X)^r = 0$. Отсюда вытекает, что эндоморфизм $\rho_0^*(X)$ нильпотентен и потому $F(X)$ нильпотентен. Мы видели также, что $F(I' \cap L)$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов. Но $I' \cap L$ — идеал в G, так как $[H, I' \cap L] \subset [H, L] \subset I' \cap L$ и $[L, I' \cap L] \subset I' \cap L$. Поэтому, согласно (1.3.9), $F(H + (I' \cap L)$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов. Поскольку $H + I' \cap L$ — идеал в L, мы можем снова применить (1.10.5) и заключить, что $F'(H + (I' \cap L)) = 0$. □

(D) Теперь мы в состоянии доказать теорему (1.10.1), если примем без доказательства следующее утверждение:

(1.10.7) *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем P характеристики 0, и пусть R — радикал, а N — ниль-радикал алгебры L. Тогда*

a) $[L, R] \subset N$ (2.1.7);

b) *существует полупростая подалгебра S в L, такая что* $L = S + R$ (3.5.1).

Сохраняя обозначения из (1.10.7), обозначим еще через Z центр алгебры L. Ясно, что $L \supset R \supset N \supset Z$. Представление (L, ad) алгебры L имеет своим ядром Z. Если нам удастся построить представление (V, f) алгебры L, точное на Z, то представление $(L, \mathrm{ad}) \oplus (V, f)$ будет точным на L. Далее, если $f(N)$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов, то тем же свойством обладает $(\mathrm{ad} \oplus f)(N)$. Построим представление (V, f), используя (1.10.6) и (1.10.7).

Если $Z = 0$, то доказывать нечего. Предположим поэтому, что $\dim Z = n > 0$. Имеется масса точных представлений алгебры Z. Например, если $X_1, \ldots, X_n$ — базис в Z, то

$$Z \ni X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \to f_0(X) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n+1, P)$$

— точное представление нильпотентными матрицами. Поскольку алгебра N нильпотентна, существует цепочка ее идеалов: $Z = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_r = N$, в которой $\dim (N_i/N_{i-1}) = 1$. Более подробно, $N_i = N_{i-1} + PX_i$, где $X_i \in N$. Допустим, что (V_{i-1}, f_{i-1}) — представление алгебры N_{i-1}, отображающее каждый элемент $X \in N_{i-1}$ в нильпотентный эндоморфизм. В таком случае ассоциированное вполне приводимое представление (V_{i-1}, f'_{i-1}) тождественно равно 0, и эндоморфизм $\mathrm{ad}\, X_i|_{N_{i-1}}$ нильпотентен. Следовательно, выполняется условие из пункта (iii) предложения (1.10.6), и данное представление можно продолжить до такого представления (V_i, f_i) алгебры N_i, что $f'_i(X_i) = 0$. Поскольку к тому же $\ker f'_i \supset \ker f'_{i-1} = N_{i-1}$, то $f'_i(N_i) = 0$ и $f_i(N_i)$ состоит из нильпотентных элементов. Таким образом, можно построить представление (V_r, f_r) алгебры N, образ которого $f_r(N)$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов и которое точно на Z.

Пусть $\dim (R/N) = s$. Выберем такие элементы $Y_1, \ldots, Y_s$, что $R = N + PY_1 + \ldots + PY_s$, и положим $R_j = N + PY_1 + \ldots + PY_j$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$. Поскольку $[R, R] \subset N$, все R_j — идеалы в R, откуда следует, снова в силу (1.10.6), что любое представление алгебры R_{j-1} может быть продолжено до представления алгебры R_j. Так как $f'_r = 0$, то ввиду (1.10.6), (ii), можно считать, что каждый элемент X из N переводится в нильпотентный эндоморфизм.

Наконец, полученное представление алгебры R продолжается до представления алгебры L, ибо $L = S + R$ и $[S, R] \subset N$. □

Глава 2

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

В этой главе мы будем изучать полупростые алгебры Ли над полями характеристики 0. Структура и классификация таких алгебр детально исследовались, начиная с конца девятнадцатого столетия. Бóльшая часть известных результатов относится к случаю $P = \overline{P}$.

Наша первая цель — показать, что алгебра Ли над полем характеристики 0 полупроста тогда и только тогда, когда она невырожденна. Ввиду (1.5.6) это позволяет свести изучение полупростых алгебр Ли к изучению простых алгебр Ли. Основной инструмент здесь — это разложение по корневым подпространствам, получающееся при ограничении присоединенного представления на подалгебру Картана. В §§ 2.1—2.6 дается классификация простых алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0. Оказывается, что, помимо семейств классических алгебр Ли, существует лишь пять простых алгебр Ли.

На протяжении всей этой главы предполагается, что основное поле P имеет характеристику 0.

2.1. Полупростые алгебры Ли

Пусть L — алгебра Ли над $P = \overline{P}$, и пусть

(1) $\quad L = L(0) \oplus L(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus L(\alpha_k)$

— ее разложение на корневые подпространства относительно подалгебры Картана $L(0) = L_0$. Пусть V — векторное пространство над P и (V, f) — представление алгебры L. Так как отображение $L_0 \ni X \longmapsto f(X) \in \mathfrak{gl}(V)$ является представлением нильпотентной алгебры Ли, то мы получаем разложение пространства V в прямую сумму

(2) $\quad V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots ,$

где λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — функции из L_0 в P и для любого $X \in L_0$ пространство $V(\lambda_i)$ содержится в обобщенном собственном подпространстве эндоморфизма $f(X)$, отвечающем собственному значению $\lambda_i(X)$ (согласно (1.3.11)). Функции $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_1, \ldots,$ в силу

(1.4.9), линейны; функции λ_i называются *весами* алгебры L относительно подалгебры Картана L_0 (и представления (V, f)). Разумеется, функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ можно считать попарно различными, поэтому существует такой элемент $X \in L_0$, что все числа $\alpha_i(X)$ отличны от нуля и друг от друга. При таком выборе X подпространства $L(\alpha_i)$ совпадают с обобщенными собственными подпространствами эндоморфизма ad X, отвечающими собственным значениям $\alpha_i(X)$. Следовательно, ввиду (1.2.2), $[L(\alpha_i), L(\alpha_j)]$ содержится в собственном подпространстве, отвечающем собственному значению $\alpha_i(X) + \alpha_j(X)$, т. е. в $L(\alpha_i + \alpha_j)$. Таким образом,

(3) $\quad [L(\alpha), L(\beta)] \subset L(\alpha + \beta)$,

где α, β — корни (или 0). Аналогичное рассуждение, только с использованием (1.2.1), дает

(4) $\quad L(\alpha) V(\lambda) \subset V(\alpha + \lambda)$.

В (3) и (4) по-прежнему подразумевается, что $L(\alpha + \beta) = 0$, если $\alpha + \beta$ $(\neq 0)$ не является корнем, и $V(\alpha + \lambda) = 0$, если $\alpha + \lambda$ не является весом.

(2.1.1) *Если α и $-\alpha$ — корни или $\alpha = 0$,*

$$X_+ \in L(\alpha), \quad X_- \in L(-\alpha), \qquad X_0 = [X_+, X_-] \in L_0$$

и λ — вес, то $\lambda(X_0) = r\alpha(X_0)$, где r — некоторое рациональное число.

Доказательство. Предположим сперва, что $\alpha = 0$. Так как подалгебра L_0 разрешима, то, согласно (1.4.7), $f(L_0)$ состоит из эндоморфизмов, имеющих верхне-треугольные матрицы относительно подходящего базиса в V, и, значит, $[f(L_0), f(L_0)]$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов. В этом случае $\lambda(X_0) = 0$, поскольку $X_0 \in L_0^{(1)} = [L_0, L_0]$.

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Подберем неотрицательные целые числа j и k, для которых $\lambda - j\alpha, \ldots, \lambda - \alpha, \lambda, \lambda + \alpha, \ldots, \lambda + k\alpha$ являются весами относительно L_0 и (V, f), а $\lambda - (j+1)\alpha$ и $\lambda + (k+1)\alpha$ таковыми не являются. Положим

$$U = V(\lambda - j\alpha) + \ldots + V(\lambda) + \ldots + V(\lambda + k\alpha).$$

Согласно (4), U инвариантно относительно X_+, X_- и L_0. Положим $m(i) = \dim V(\lambda + j\alpha)$. Тогда

$$\operatorname{tr}_U f(X_0) = \sum_{i=-j}^{k} \operatorname{tr}_{V(\lambda + j\alpha)} f(X_0) = \sum_{i=-j}^{k} m(i)(\lambda + i\alpha)(X_0).$$

С другой стороны, так как $X_0 = [X_+, X_-]$, то $\mathrm{tr}_U f(X_0) = 0$. Следовательно, $\Sigma m(i)(\lambda + i\alpha)(X_0) = 0$, т. е.

$$\lambda(X_0) = \frac{-\sum im(i)}{\sum m(i)}\alpha(X_0). \quad \square$$

(2.1.2) *Пусть L — алгебра Ли над P и B — ее форма Киллинга. Алгебра L разрешима тогда и только тогда, когда $B = 0$ на $L^{(1)} = [L, L]$.*

Доказательство. Предположим, что алгебра L разрешима. Расширяя поле коэффициентов P до $\overline{P}$, мы получим в силу 1.6, что алгебра $L^{\overline{P}}$ разрешима и $L^{(1)} \subset (L^{(1)})^{\overline{P}} = (L^{\overline{P}})^{(1)}$. С другой стороны, согласно теореме Ли, при некотором выборе базиса в $L^{\overline{P}}$ матрицы всех эндоморфизмов ad X $(X \in (L^{\overline{P}})^{(1)}$ треугольны, причем их диагональные элементы равны 0, поэтому $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \cdot \mathrm{ad}\, Y) = 0$ при $X, Y \in (L^{\overline{P}})^{(1)}$. Следовательно, $B = 0$ на $L^{(1)}$.

Докажем обратное утверждение. Допустим вначале, что $P = \overline{P}$. Пусть $B = 0$ на $L^{(1)}$. Так как $L^{(1)} = \sum_{\alpha,\ \beta=0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k} [L(\alpha), L(\beta)]$ и $[L(\alpha), L(\beta)] \subset L(\alpha + \beta)$, где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — совокупность всех корней, то

$$L_0 \cap L^{(1)} = \sum [L(\alpha), L(-\alpha)].$$

Следовательно, если мы предположим, что $L = L^{(1)}$, то придем к выводу, что всякий элемент из L_0 является линейной комбинацией элементов вида X_0 из (2.1.1). Положим $\dim L(\alpha_i) = n_i$. Так как для каждого $X \in L_0$ матрица эндоморфизма ad X относительно некоторого базиса в L треугольна и имеет диагональные элементы

$$0, 0, \ldots, 0, \underbrace{\alpha_1(X), \ldots, \alpha_1(X)}_{n\,(1)\ \text{раз}}, \ldots, \underbrace{\alpha_k(X), \ldots, \alpha_k(X)}_{n\,(k)\ \text{раз}},$$

то $B(X, X) = \sum_{i=1}^{k} n(i)\alpha_i(X)^2$. Выбрав элемент X_0, как в (2.1.1), получим, что $\alpha_i(X_0) = r(i)\alpha(X_0)$, где $r(i) \in \mathbb{Q}$ (простое подполе в P), и $B(X_0, X_0) = \left(\sum_{i=1}^{k} n(i) r(i)^2\right)\alpha(X_0)^2$. Поэтому из равенства $B(X_0, X_0) = 0$ следует, что $\alpha(X_0) = 0$ и $\alpha_i(X_0) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Поскольку всякий элемент из L_0 есть линейная комбинация элементов вида X_0, то $\alpha_i = 0$ при $i = 1, \ldots, k$, т. е. $L = L_0$ — нильпотентная алгебра. Но это противоречит предположению о том, что $L = L^{(1)}$. Таким образом, $L \neq L^{(1)}$. Так как форма Киллинга B_1 алгебры $L^{(1)}$ является ограничением формы B на $L^{(1)}$, то $B_1 = 0$ на $L^{(2)} = (L^{(1)})^{(1)}$. Следовательно, разрешимость алгебры L устанавливается индукцией по $\dim L$.

Предположим, наконец, что $P \neq \overline{P}$. Если форма Киллинга B равна нулю на $L^{(1)}$, то форма Киллинга алгебры $L^{\overline{P}}$ равна нулю на $(L^{(1)})^{\overline{P}} = (L^{\overline{P}})^{(1)}$ и, значит, алгебра $L^{\overline{P}}$ разрешима. Следовательно, и L разрешима. □

(2.1.3) *Всякая полупростая алгебра Ли невырожденна.*

Доказательство. Пусть L — полупростая алгебра Ли и B — ее форма Киллинга. Тогда $L^{\perp} = \{X \in L : B(X, L) = 0\}$ есть идеал в L, в силу (1.5.2). Следовательно, форма Киллинга алгебры $L^{\perp}$ является ограничением формы B на $L^{\perp}$. С другой стороны, $B(L^{\perp}, L^{\perp}) = 0$. Из (2.1.2) вытекает поэтому, что алгебра $L^{\perp}$ разрешима и, значит, $L^{\perp} = 0$. □

Используя (1.5.6), (1.5.8), (1.6.1) и (2.1.3), мы можем доказать следующую теорему о полупростых алгебрах Ли:

(2.1.4) *Теорема.* *Пусть L — полупростая алгебра Ли над P.*

1) *L разлагается в прямую сумму простых идеалов, причем это разложение однозначно с точностью до порядка слагаемых.*
2) *Идеалы и факторалгебры алгебры L полупросты.*
3) *$L = L^{(1)}$.*
4) *Алгебра L полна.*
5) *Для всякого расширения $\widetilde{P}$ поля P алгебра $L^{\widetilde{P}}$ полупроста.*

Доказательство. Утверждения 1) и 3) — 5) уже доказаны выше. Докажем 2). Пусть A — идеал в L. Тогда $A^{\perp} = \{X \in L: B(X, A) = 0\}$ и $A \cap A^{\perp} = C$ — также идеалы. Форма Киллинга алгебры C является ограничением формы B на C и потому равна нулю. Следовательно, алгебра L разрешима, в силу (2.1.2). Поскольку L полупроста, то $C = 0$, так что форма Киллинга алгебы A невырожденна. Так как $(A^{\perp})^{\perp} = A$, то $A^{\perp} \cap (A^{\perp}) = 0$, откуда следует, что B невырожденна на $A^{\perp}$. Но $A^{\perp} \cong L/A$ и, значит, факторалгебра L/A невырожденна. □

(2.1.5) *Пусть L и H — алгебры Ли над P и R — радикал алгебры L.*

1) *Если f — гомоморфизм L на H, то $f(R)$ — радикал алгебры H.*
2) *$L = L^{(1)} + R$.*

Доказательство. 1) Пусть A — ядро гомоморфизма f. Факторалгебра $L/(A + R)$, как гомоморфный образ полупростой алгебры Ли L/R, полупроста. Поскольку $H/f(R) \cong L/A(A + R)/A \cong L/(A + R)$, то алгебра $H/f(R)$ тоже полупроста. Далее, $f(R)$ — разрешимый идеал алгебры H. Следовательно, $f(R)$ — радикал алгебры H.

2) Так как алгебра $L/L^{(1)}$ абелева, она совпадает со своим радикалом, и, в силу 1), $(R + L^{(1)})/L^{(1)} = L/L^{(1)}$. □

Пусть L — алгебра Ли. Всякая подалгебра A в L, инвариантная относительно всех дифференцирований алгебры L: $\operatorname{der}(L) A \subset A$, называется *характеристической*. Характеристические подалгебры являются идеалами. Для любых $X, Y \in L$ и $\delta \in \operatorname{dar}(L)$

$$\delta [X, Y] = [\delta X, Y] + [X, \delta Y],$$

и потому $L^{(1)}$ — характеристическая подалгебра.

(2.1.6) *Радикал является характеристической подалгеброй.*

Доказательство. Обозначим через $A^{\perp}$ ортогональное дополнение к A относительно формы Киллинга B. Из упр. 4 § 1.5 следует, что если подалгебра A характеристическая, то и $A^{(1)}$тоже. Поскольку $L^{(1)}$ — характеристическая подалгебра, достаточно доказать, что $K = (L^{(1)})^{\perp}$ совпадает с радикалом R алгебры L.

Так как $B(K^{(1)}, K^{(1)}) \subset B(L^{(1)}, K) = 0$, то K — разрешимый идеал (ввиду (2.1.2)). Следовательно, $R \supset K$, и, значит, достаточно показать, что $B(L^{(1)}, R) = 0$.

Предположим вначале, что $P = \bar{P}$. Выберем какую-нибудь максимальную цепочку идеалов в L:

$$L = L_k \underset{\neq}{\supset} L_{k-1} \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} L_0 = 0.$$

Для $i = 1, 2, \ldots, k$ обозначим через f_i представление алгебры L, индуцированное присоединенным представлением на L_i/L_{i-1}. Поскольку между L_{i-1} и L_i нет идеалов, все представления f_i неприводимы. Так как $f_i(R)$ — радикал алгебры $f_i(L)$, то, согласно (1.4.11), $f_i(R) \subset P1_i$, где 1_i — тождественное преобразование L_i/L_{i-1}. С другой стороны, $\operatorname{tr} f_i(L^{(1)}) = 0$. Следовательно, для любых $X \in L^{(1)}$ и $Y \in R$ мы имеем $\operatorname{tr}(f_i(X) f_i(Y)) = 0$, а потому $B(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr} f_i(X) f_i(Y) = 0$.

Общий случай легко сводится к случаю $P = \bar{P}$. □

(2.1.7) *Пусть L — алгебра Ли, R — ее радикал, N — ее нильрадикал и R_1 — радикал алгебры $L^{(1)}$. Тогда $R_1 = L^{(1)} \cap R$ и R_1 является нильпотентной характеристической подалгеброй. Далее, для всякого представления (V, f) алгебры L эндоморфизм $f(X)$ нильпотентен при любом $X \in R_1$. Кроме того, $[L, R] \subset N$.*

Доказательство. Из равенства $L^{(1)} + R = L$ следует, что алгебра $L^{(1)}/L^{(1)} \cap R \cong L/R$ полупроста и $L^{(1)} \cap R$ — разрешимый идеал в $L^{(1)}$. Следовательно, $R_1 = L^{(1)} \cap R$. Поскольку $L^{(1)}$ и R — характеристические подалгебры в L, тем же свойством обладает и R_1.

Предположим теперь, что $P = \overline{P}$, L — алгебра Ли над P, V — векторное пространство над P и V (f) — представление алгебры L. Пусть $V = V_k \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} V_0 = 0$ — композиционный ряд для V. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ обозначим через f_i представление алгебры L в V_i/V_{i-1}, индуцированное представлением f. Из неприводимости представлений $(V_i/V_{i-1}, f_i)$ вытекает, в силу (1.4.11), что все алгебры $(f_i(L))^{(1)}$ полупросты. Если теперь через A_i мы обозначим ядро представления f_i, то из соотношений

$$L^{(1)}/L^{(1)} \cap A_i \cong (L^{(1)} + A_i)/A_i \cong (f_i(L))^{(1)}$$

получим, что $L^{(1)} \cap A_i \supset R_i$ и, значит, $f_i(R_1) = 0$. Отсюда вытекает $f(X) V_i \subset V_{i-1}$ для любого $X \in R_1$, так что $f(X)^k = 0$.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Пусть L — алгебра Ли, V — векторное пространство над P и (V, f) — представление алгебры L. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — базис в L. Полагая для любых $a_1, \ldots, a_n \in \overline{P}$

$$f^{\overline{P}}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1f(X_1) + \cdots + a_nf(X_n),$$

мы определим представление $(V^{\overline{P}}, f^{\overline{P}})$ алгебры Ли $L^{\overline{P}}$. Коммутаторная алгебра алгебры $L^{\overline{P}}$ совпадает с $(L^{(1)})^{\overline{P}}$, а радикал алгебры $(L^{(1)})^{\overline{P}}$ равен $R_1^{\overline{P}}$ (упр. 4). Следовательно, если $X \in R_1$, то эндоморфизм $f^{\overline{P}}(X)$ нильпотентен, а значит, и $f(X)$ нильпотентен.

Итак, нам известно, что эндоморфизм $f(X)$ нильпотентен для любого $X \in R_1$ и любого представления f. В частности, $\operatorname{ad} X$ нильпотентен. Отсюда следует, что R_1 — нильпотентный идеал и $R_1 \subset N$. Поэтому $[L, R] \subset [L, L] \cap R = R_1 \subset N$. $\square$

Пусть V — векторное пространство над P и $\widetilde{P}$ — расширение поля P. Тогда $\mathfrak{gl}(V)$ естественным образом вкладывается в $\mathfrak{gl}(V^{\widetilde{P}})$. Мы опустим доказательство следующей теоремы из общей алгебры:

(2.1.8) *Если подмножество Σ алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ вполне приводимо, то оно вполне приводимо как подмножество в $\mathfrak{gl}(V^{\widetilde{P}})$, и обратно.*

(2.1.9) *Если алгебра Ли L обладает вполне приводимым точным представлением (V, f), то она является прямой суммой своего центра и некоторого полупростого идеала.*

Доказательство. Предположим сперва, что $P = \overline{P}$, L — алгебра Ли над P и V — векторное пространство над P. Пусть V разлагается в прямую сумму минимальных инвариантных относительно L подпространств $V_1, \ldots, V_k$. Для любого $X \in L$ обозначим через $f_i(X)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ограничение эндоморфизма $f(X)$ на V_i. Тогда (V_i, f_i) есть неприводимое представление алгебры L. Пусть A_i — ядро представления f_i $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_k$

$= 0$. Обозначим через R радикал алгебры L. Тогда радикал алгебры $f_i(L)$ равен $f_i(R)$ и $(f_i(L))^{(1)} = f_i(L^{(1)})$. В силу (1.4.11), $f_i(L^{(1)}) \cap f_i(R) = 0$. Следовательно, $L^{(1)} \cap R \subset A_i$ для всех i, и потому $L^{(1)} \cap R = 0$. Отсюда вытекает, в силу (2.1.5), 2), что $L = L^{(1)} \oplus R$ (прямая сумма). Поскольку $L^{(1)} \cong L/R$, алгебра $L^{(1)}$ полупроста. С другой стороны, из включения $[L, R] \subset L^{(1)} \cap R = 0$ следует, что R содержится в центре. Так как центр всегда содержится в радикале, то R совпадает с центром.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть L — алгебра Ли и (V, f) — ее представление. Расширим поле коэффициентов P пространства V до $\bar{P}$ и построим пространство $V^{\bar{P}}$. Пусть $\tilde{L}$ — векторное пространство над $\bar{P}$, порожденное $f(L)$ в $\mathfrak{gl}(V^{\bar{P}})$. Очевидно, что $\tilde{L}$ есть алгебра Ли над $\bar{P}$. Если множество $f(L)$ вполне приводимо в $\mathfrak{gl}(V)$, то, согласно (2.1.8), оно обладает тем же свойством и как подмножество в $\mathfrak{gl}(V^{\bar{P}})$. Следовательно, существует полупростой идеал $\tilde{S}$ в $\tilde{L}$, такой что $\tilde{L} = \tilde{S} \oplus \tilde{Z}$, где $\tilde{Z}$ — центр $\tilde{L}$. Пусть R — радикал алгебры L. Тогда подпространство $\tilde{R}$, порожденное $f(R)$ в $\mathfrak{gl}(V^{\bar{P}})$, есть разрешимый идеал в $\tilde{L}$. Значит, $f(R) \subset \tilde{R} \subset \tilde{Z}$. Кроме того, $f(L^{(1)}) = (f(L))^{(1)} \subset \tilde{L}^{(1)} = \tilde{S}$. Следовательно, $f(R) \cap f(L^{(1)}) = 0$, т. е. $R \cap L^{(1)} = 0$. Отсюда видно, что алгебра $L^{(1)}$ полупроста и R — центр алгебры L. □

Упражнение 1. Множество $\mathfrak{u}(m) = \{(s_{ij}) \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}): s_{ij} + \bar{s}_{ji} = 0$ для $i, j = 1, 2, \ldots, m\}$ образует алгебру Ли размерности m^2 над $\mathbb{R}$. Каждая подалгебра в $\mathfrak{u}(m)$ является прямой суммой своего центра и полупростого идеала.

[*Набросок доказательства.* Определим скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$ формулой $\langle (a_1, \ldots, a_m), (b_1, \ldots, b_m)\rangle = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i b_i$. Тогда условие $s = (s_{ij}) \in \mathfrak{u}(m)$ можно записать в виде $\langle sa, b\rangle + \langle a, sb\rangle = 0$ для всех $a, b \in \mathbb{C}^m$ (где элементы $\mathbb{C}^m$ рассматриваются как векторы-столбцы). Пусть Σ — некоторое подмножество в $\mathfrak{u}(m)$. Если векторное пространство $U \subset \mathbb{C}^m$ инвариантно относительно Σ, то его ортогональное дополнение (по отношению к введенному выше скалярному произведению) также инвариантно относительно Σ. Следовательно, Σ вполне приводимо.]

Упражнение 2. Пусть L — алгебра Ли и B — ее форма Киллинга. Тогда подалгебра $L^{\perp} = \{X \in L: B(X, L) = 0\}$ совпадает с ниль-радикалом алгебры L. Эта подалгебра $L^{\perp}$ является характеристической, и каждый нильпотентный идеал алгебры L содержится в $L^{\perp}$.

Упражнение 3. Радикал коммутаторной алгебры $L^{(1)}$ алгебры L равен пересечению всех максимальных идеалов в L.

Упражнение 4. Пусть L — алгебра Ли над P, а R — ее радикал. Для любого расширения $\tilde{P}$ поля P радикал алгебры $L^{\tilde{P}}$ равен $R^{\tilde{P}}$.

2.2. Разложение по корневым подпространствам

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $P = \bar{P}$, B — ее форма Киллинга, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(\alpha) + \mathfrak{g}(\beta) + \ldots, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(0),$$

— ее разложение по корневым подпространствам. Обозначим через $\mathfrak{h}^*$ векторное пространство, сопряженное к $\mathfrak{h}$. Пусть $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ — множество всех корней $\{\alpha, \beta, \ldots\}$; положим $\widetilde{\Delta} = \Delta \cup \{0\}$.

(2.2.1) *Если* α, $\beta \in \widetilde{\Delta}$ *и* $\alpha + \beta \neq 0$, *то* $B(\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\beta)) = 0$.

Доказательство. Для $X \in \mathfrak{g}(\alpha)$ и $Y \in \mathfrak{g}(\beta)$ положим $\sigma = \operatorname{ad} X \cdot \operatorname{ad} Y$. Тогда, ввиду (1.2.2), для любого $\gamma \in \Delta$

$$\sigma\mathfrak{g}(\gamma) \subset \mathfrak{g}(\gamma + \alpha + \beta), \ldots, \sigma^k\mathfrak{g}(\gamma) \subset \mathfrak{g}(\gamma + k(\alpha + \beta)), \ldots .$$

Так как $\widetilde{\Delta}$ — конечное множество, то для некоторого достаточно большого k мы имеем $\gamma + k(\alpha + \beta) \notin \widetilde{\Delta}$ и $\mathfrak{g}(\gamma + k(\alpha + \beta)) = 0$, откуда следует, что $\sigma^k\mathfrak{g}(\gamma) = 0$. Поскольку это справедливо для всех γ, эндоморфизм σ нильпотентен и $\operatorname{tr}\sigma = 0$. □

(2.2.2) 1) *Ограничение $B_{\mathfrak{h}}$ формы B на $\mathfrak{h}$ невырожденно.*

2) *Алгебра $\mathfrak{h}$ абелева.*

3) *Δ порождает $\mathfrak{h}^*$ (как линейное пространство).*

4) *Если $\alpha \in \Delta$, то $-\alpha \in \Delta$.*

Доказательство. 1) Предположим, что $H \in \mathfrak{h}$ и $B(H, \mathfrak{h}) = 0$. Так как, в силу (2.2.1), $B(H, \mathfrak{g}(\alpha)) = 0$ для любого $\alpha \in \Delta$, то $B(H, \mathfrak{g}) = 0$ и $H = 0$.

2) Заметим, что для любых H_1, $H_2 \in \mathfrak{h}$

$$\beta_h(H_1, H_2) = B(H_1, H_2) = \sum_{\alpha \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}(\alpha))\, \alpha(H_1)\, \alpha(H_2).$$

Если $H_2 \in \mathfrak{h}^{(1)}$, то $\alpha(H_1) = 0$ при $\alpha \in \Delta$ и, значит, $B_{\mathfrak{h}}(H_1, H_2) = 0$. Согласно 1), отсюда следует, что $H_1 = 0$.

3) Пусть H_0 — такой элемент алгебры $\mathfrak{h}$, что $\alpha(H_0) = 0$ для всех $\alpha \in \Delta$. Тогда $B(H_0, H) = 0$ для любого $H \in \mathfrak{g}$ и, следовательно, $H_0 = 0$.

4) Если $\mathfrak{g}(-\alpha) = 0$, то, в силу (2.2.1), $B(\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\alpha)) = 0$ и, значит, $\mathfrak{g}(\alpha) = 0$. □

Введем в $\mathfrak{h}$ скалярное произведение по формуле

$$\langle X, Y\rangle = B(X, Y) = \sum_{\alpha \in \Delta} (\dim \mathfrak{g}(\alpha))\, \alpha(X)\, \alpha(Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{h}).$$

Поскольку форма $B_{\mathfrak{h}}$ невырожденна, для каждого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ существует единственный элемент $H_\lambda \in \mathfrak{h}$, такой что $\lambda(H) = \langle H_\lambda, H\rangle$ при всех $H \in \mathfrak{h}$. Это позволяет определить невырожденное, скалярное произведение в $\mathfrak{h}^*$ формулой

$$\langle \lambda, \mu\rangle = \langle H_\lambda, H_\mu\rangle = \lambda(H_\mu) = \mu(H_\lambda) \quad (\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*).$$

(2.2.3) $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ *при* $\alpha \in \Delta$.

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ абелева и $\operatorname{ad} h \cdot \mathfrak{g}(\alpha) \subset \mathfrak{g}(\alpha)$, то, согласно (1.4.6), в $\mathfrak{g}(\alpha)$ найдется такой элемент $E_\alpha \neq 0$, что $(\operatorname{ad} \mathfrak{h}) E_\alpha \subset PE_\alpha$, т. е. $[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. В силу (2.2.1), найдется такой элемент $X \in \mathfrak{g}(-\alpha)$, что $B(E_\alpha, X) \neq 0$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $B(E_\alpha, X) = 1$. Тогда $[E_\alpha, X] \in [\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(-\alpha)] \subset \mathfrak{h}$ и для любого $H \in \mathfrak{h}$

$$\langle [E_\alpha, X], H \rangle = B([E_\alpha, X], H) = B([H, E_\alpha], X) = \alpha(H) B(E_\alpha, \alpha(H),$$

откуда следует, что $[E_\alpha, X] = H_\alpha$.

Так как $E_\alpha \in \mathfrak{g}(\alpha)$, $X \in \mathfrak{g}(-\alpha)$ и $H_\alpha = [E_\alpha, X]$, то, согласно (2.1.1), для любого $\beta \in \Delta$

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \beta(H_\alpha) = r\alpha(H_\alpha) = r \langle \alpha, \alpha \rangle, \text{ где } r \in \mathbb{Q}.$$

Допустим, что $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$. Тогда $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$ для всякого $\beta \in \Delta$ и, следовательно, $\alpha = 0$, поскольку Δ порождает $\mathfrak{h}^*$. Тем самым мы пришли к противоречию. □

(2.2.4) $\dim \mathfrak{g}(\alpha) = 1$ *для любого* $\alpha \in \Delta$. *Если* $\alpha \in \Delta$ *и* $k\alpha \in \Delta$ $(k \in \mathbb{Z})$, *то* $k = \pm 1$.

Доказательство. Как и при доказательстве (2.2.3), выберем такие элементы $E_\alpha \in \mathfrak{g}(\alpha)$ и $X \in \mathfrak{g}(-\alpha)$, что $[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$ для всех $H \in \mathfrak{h}$ и $[E_\alpha, X] = H_\alpha$, и положим

$$V = PE_\alpha + \mathfrak{h} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{g}(-j\alpha).$$

Ясно, что V инвариантно относительно $\operatorname{ad} E_\alpha$, $\operatorname{ad} X$ и $\operatorname{ad} H_\alpha$. Поскольку $[E_\alpha, X] = H_\alpha$, то $\operatorname{tr}_V(\operatorname{ad} H_\alpha) = 0$. С другой стороны,

$$\operatorname{tr}_V(\operatorname{ad} H_\alpha) = \Big(1 - \sum_j j \dim \mathfrak{g}(-j\alpha)\Big) \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

Так как $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$, то

$$\sum_j j \dim \mathfrak{g}(-j\alpha) = \dim \mathfrak{g}(-\alpha) + 2 \dim \mathfrak{g}(-2\alpha) + \cdots = 1.$$

Поскольку $\mathfrak{g}(-\alpha) \neq 0$, отсюда следует, что $\dim \mathfrak{g}(-\alpha) = 1$ и $\mathfrak{g}(-j\alpha) = 0$ при $j = 2, 3, \ldots$. Далее, заменяя α на $-\alpha$, находим, что $\dim \mathfrak{g}(\alpha) = 1$ и $\mathfrak{g}(j\alpha) = 0$ при $j = 2, 3, \ldots$. □

Объединяя полученные выше результаты, заключаем, что справедлива

(2.2.5) Теорема. *В каждом из (одномерных) подпространств* $\mathfrak{g}(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, *можно выбрать базисный вектор* E_α *так, что*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + PE_\alpha + PE_{-\alpha} + PE_\beta + PE_{-\beta} + \cdots,$$

причем выполнены следующие условия:

1) *подалгебра* $\mathfrak{h}$ *абелева и* $[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ *при* $H \in \mathfrak{h}$; *в частности,* $\operatorname{ad} H$ *есть полупростое линейное преобразование;*

2) $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ $(N_{\alpha,\beta} \in P)$ *при* $\alpha + \beta \neq 0$;

3) $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha$ и $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1$ (*знак минус перед* H_α *окажется удобным в дальнейшем*);

4) *если* $\alpha \in \Delta$ *и* $k\alpha \in \Delta$ $(k \in \mathbb{Z})$, *то* $k = \pm 1$;

5) $$B\Big(H + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha E_\alpha,\ H' + \sum_{\alpha \in H} x'_\alpha E_\alpha\Big) = B(H, H') - \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha x'_{-\alpha},$$

$$\Big(B(H, H') = \langle H, H' \rangle = \sum_{\alpha \in H} \alpha(H)\, \alpha(H')\Big);$$

6) *для любых* $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} \langle \lambda, \alpha \rangle \langle \mu, \alpha \rangle.$$

Сейчас, пожалуй, подходящий момент подробно рассмотреть наиболее простой и важный из доступных примеров — алгебру $\mathfrak{sl}(n, P)$. Некоторые факторы об этой алгебре время от времени уже появлялись в тексте и в упражнениях, но для удобства читателя мы начнем с самого начала и прежде всего покажем, что

(2.2.6) *Форма Киллинга алгебры* $\mathfrak{sl}(n, P)$ *задается формулой*

$$B(s, t) = 2n \operatorname{tr}(st)$$

и невырожденна при $n \geqslant 2$.

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathfrak{sl}(n, P)$ — идеал в $\mathfrak{gl}(n, P)$, ее форма Киллинга является ограничением формы Киллинга B алгебры $\mathfrak{gl}(n, P)$.

Пусть s и t принадлежат $\mathfrak{gl}(n, P)$. Тогда

$$(\operatorname{ad} s)^2 t = [s, [s, t]] = s^2 t - 2sts + ts^2.$$

Предположим, что эндоморфизмы s, t и $s^2 t$ представляются в некотором базисе матрицами (s_{ij}), (t_{ij}) и (u_{ij}) соответственно. Тогда $u_{pq} = \sum_{i,\,j} s_{pi} s_{ij} t_{iq}$. Поэтому след эндоморфизма $t \mapsto s^2 t$ равен $\sum_q \sum_{p,\,i} s_{pi} s_{ip} = n \operatorname{tr}(s^2)$, где $n = \dim V$. Аналогично $\operatorname{tr}(t \mapsto ts^2) = n \operatorname{tr}(s^2)$, $\operatorname{tr}(t \mapsto sts) = (\operatorname{tr} s)^2$, что равно 0 при $s \in \mathfrak{sl}(n, P)$.

Итак, $B(s, s) = 2n \operatorname{tr}(s^2)$ при $s \in \mathfrak{sl}(n, P)$. Если s и s' принадлежат $\mathfrak{sl}(n, P)$, то

$$B(s, s') = \frac{1}{4}(B(s+s', s+s') - B(s-s', s-s')) = 2n \operatorname{tr}(ss').$$

Так как, в силу (1.6.2), алгебра $\mathfrak{sl}(n, P)$ проста, то форма B невырожденна. □

Подалгебра $\operatorname{sdiag}(n, P)$, состоящая из тех матриц $(s_{ij}) \in \mathfrak{sl}(n, P)$, для которых $s_{ij} = 0$ при $i \neq j$, абелева. Далее, нетрудно проверить, что $\operatorname{sdiag}(n, P)$ совпадает со своим нормализатором. В самом деле, пусть $H = (h_{ij}) \in \operatorname{sdiag}(n, P)$ имеет попарно различные диагональные элементы. Если элемент $X \in \mathfrak{sl}(n, P)$ нормализует $\operatorname{sdiag}(n, P)$, то матрица $[X, H]$ диагональна. Но (i, j)-й элемент этой матрицы равен $x_{ij}(h_{jj} - h_{ii})$, и, следовательно, $x_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{sdiag}(n, P)$ совпадает со своим нормализатором и H — регулярный элемент.

В обозначениях настоящего параграфа, мы можем взять $\mathfrak{h} = \operatorname{sdiag}(n, P)$. Определим $\lambda_i \in \operatorname{sdiag}(n, P)^*$, полагая $\lambda_i(H) = h_{ii}$. Перемножая матрицы, находим, что

$$[H, E_{ij}] = (h_{ii} - h_{jj}) E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)(H) E_{ij}.$$

Таким образом, функции α из (2.2.5) в нашем случае имеют вид $\lambda_i - \lambda_j$ $(i \neq j)$. Для $\alpha = \alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ можно в качестве H_α взять матрицу из $\operatorname{sdiag}(n, P)$, у которой

$$h_{ii} = 1/2n, \quad h_{jj} = -1/2n,$$

а остальные элементы равны 0. Тогда для $i < j$ можно положить $E_\alpha = E_{ij}$ и $E_{-\alpha} = (-1/2n) E_{ji}$.

Упражнение. Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $f(E_\alpha)$ — нильпотентный эндоморфизм пространства V. В частности, эндоморфизм $\operatorname{ad} E_\alpha$ нильпотентен.

2.3. α-последовательность весов

Мы сохраняем обозначения из (2.2.5). Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через Λ совокупность всех весов относительно (V, f). Это — конечное подмножество в $\mathfrak{h}^*$.

(2.3.1) *Предположим, что* $\alpha \in \Delta$, $\lambda \in \Lambda$ *и* $\lambda + \alpha \notin \Lambda$. *Тогда* $j = 2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$ *есть неотрицательное целое число и* $\lambda - i\alpha \in \Lambda$ *для тех и только тех* $i \in \mathbb{Z}$, *для которых выполнено условие* $0 \leqslant i \leqslant j$.

Доказательство. Возьмем такой элемент $v \neq 0$ из $V(\lambda)$, что $\mathfrak{h}v \subset Pv$, и положим $v_k = (E_{-\alpha})^k v$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $v_0 = v$

и $v_k \in V(\lambda - k\alpha)$. Положим $v_{-1} = 0$ и индукцией по k докажем формулы

(1) $\quad Hv_k = (\lambda - k\alpha)(H)\, v_k$ при $H \in \mathfrak{h}$,

(2) $\quad E_\alpha v_k = -k\left(\langle\lambda, \alpha\rangle - \frac{1}{2}(k-1)\langle\alpha, \alpha\rangle\right) v_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$

При $k = 0$ эти формулы очевидны. Допустим, что они справедливы для $k - 1$. Тогда, в силу предположения индукции,

$$\begin{aligned} Hv_k &= HE_{-\alpha}v_{k-1} = E_{-\alpha}Hv_{k-1} + [H, E_{-\alpha}]\, v_{k-1} \\ &= E_{-\alpha}(\lambda - (k-1)\alpha)(H)\, v_{k-1} - \alpha(H)\, E_{-\alpha}v_{k-1} \\ &= (\lambda - k\alpha)(H)\, E_{-\alpha}v_{k-1} = (\lambda - k\alpha)(H)\, v_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\alpha v_k &= E_\alpha E_{-\alpha} v_{k-1} = E_{-\alpha}E_\alpha v_{k-1} - H_\alpha v_{k-1} \\ &= E_{-\alpha}\left(-(k-1)\langle\lambda, \alpha\rangle + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)\langle\alpha, \alpha\rangle\right) v_{k-2} \\ &\qquad\qquad - (\lambda - (k-1)\alpha)(H_\alpha)\, v_{k-1} \\ &= \Big(-(k-1)\langle\lambda, \alpha\rangle + \frac{1}{2}(k-1)\langle\alpha, \alpha\rangle \\ &\qquad\qquad - \langle\lambda, \alpha\rangle + (k-1)\langle\alpha, \alpha\rangle\Big)\, v_{k-1} \\ &= -\left(k\langle\lambda, \alpha\rangle - \frac{1}{2}k(k-1)\langle\alpha, \alpha\rangle\right) v_{k-1}. \end{aligned}$$

Тем самым формулы (1) и (2) доказаны.

Предположим теперь, что $v_j \neq 0$ и $v_{j+1} = 0$. Тогда, в силу (2), при $k = j + 1$ мы имеем $\langle\lambda, \alpha\rangle - (j/2)\langle\alpha, \alpha\rangle = 0$. Следовательно, $j = 2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$ и $\lambda - j\alpha, \lambda - (j-1)\alpha, \ldots, \lambda$ принадлежат Λ.

Далее допустим, что существует целое число $i \geqslant 2$, такое что $\lambda + i\alpha \in \Lambda$. В этом случае можно выбрать i так, что $\lambda + (i-1)\alpha \notin \Lambda$. Положим $\lambda + i\alpha = \lambda_1$ и $-\alpha = \beta$. Поскольку $\lambda_1 \in \Lambda$ и $\lambda_1 + \beta \notin \Lambda$, то

$$\frac{2\langle\lambda_1, \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle} = \frac{-2\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} - 2i = -2i - j \geqslant 0.$$

Но это невозможно, ибо $j \geqslant 0$ и $i \geqslant 2$. Мы доказали, таким образом, что если $\lambda + i\alpha \in \Lambda$ для некоторого целого i, то $i \leqslant 0$.

Допустим, наконец, что $\lambda_2 = \lambda - l\alpha \in \Lambda$ для некоторого целого $l > j$. В этом случае мы можем предположить дополнительно, что $\lambda_2 - \alpha \notin \Lambda$, поскольку множество Λ конечно. Так как $2\langle\lambda_2, -\alpha\rangle/\langle-\alpha, -\alpha\rangle = -j + 2l$, то мы получаем $\lambda_2 - (-j + 2l)(-\alpha) = \lambda + (l - j)\alpha \in \Lambda$, что невозможно, ибо $l - j > 0$. □

(2.3.2) *Для любых заданных $\alpha \in \Delta$ и $\lambda \in \Lambda$ можно найти такие неотрицательные целые числа j и k, что*

1) $\lambda + i\alpha \in \Lambda$ $(i \in \mathbb{Z})$ *тогда и только тогда, когда* $-j \leqslant i \leqslant k$;

2) $k - j = -2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$;

3) $\lambda - (2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle)\alpha \in \Lambda$;

4) *если* $\lambda + \alpha \in \Lambda$, *то* $E_\alpha V(\lambda) \neq 0$.

Доказательство. 1), 2) Пусть k — наибольшее целое число, для которого $\lambda_0 = \lambda + k\alpha \in \Lambda$. Так как $\lambda_0 + \alpha \notin \Lambda$, то, в силу (2.3.1), $\lambda_0 - i\alpha \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда

$$0 \leqslant i \leqslant 2\frac{\langle\lambda_0, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 2\frac{\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} + 2k.$$

Следовательно, $\lambda + i\alpha = \lambda_0 - (k - i)\alpha \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда

$$(3) \qquad 0 \leqslant k - i \leqslant \frac{2\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} + 2k.$$

Если положить $j = k + 2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$, то (3) эквивалентно неравенствам $-j \leqslant i \leqslant k$.

3) Это следует из того, что $-j \leqslant -2\langle\lambda, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle \leqslant k$.

4) Как и при доказательстве (2.3.1), возьмем элемент $v \neq 0$ из $V(\lambda_0)$, для которого $\mathfrak{h}v \subset Pv$, и положим $v_i = (E_{-\alpha})^i v$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $v_i \in V(\lambda_0 - i\alpha) = V(\lambda + (k - i)\alpha)$, и в частности $v_k \in V(\lambda)$. Поскольку $2\langle\lambda_0, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = j + k \geqslant k \geqslant 1$, то $v_{k-1} \neq 0$ и $v_k \neq 0$. В силу (2),

$$E_\alpha v_k = -k\left(\langle\lambda_0, \alpha\rangle - \frac{1}{2}(k-1)\langle\alpha, \alpha\rangle\right)v_{k-1}$$

и

$$\begin{aligned}\langle\lambda_0, \alpha\rangle - \frac{1}{2}(k-1)\langle\alpha, \alpha\rangle &= \langle\lambda, \alpha\rangle + \frac{1}{2}(k+1)\langle\alpha, \alpha\rangle \\ &= \frac{1}{2}(j-k)\langle\alpha,\alpha\rangle + \frac{1}{2}(k+1)\langle\alpha,\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{2}(j+1)\langle\alpha, \alpha\rangle \neq 0,\end{aligned}$$

откуда $E_\alpha V(\lambda) \neq 0$. □

Определение. Последовательность

$$\lambda - j\alpha,\ \lambda - (j-1)\alpha,\ \ldots,\ \lambda,\ \ldots,\ \lambda + k\alpha$$

из (2.3.2) будем называть *α-последовательностью* (весов), содержащей λ.

Теперь мы можем дополнить теорему (2.2.5) некоторыми новыми результатами:

(2.3.3) 1) *Если* α, β и $\alpha + \beta \in \Delta$, *то* $N_{\alpha, \beta} \neq 0$.

2) *Если* $\alpha \in \Lambda$ *и* $m\alpha \in \Delta$ $(m \in P)$, *то* $m = \pm 1$.

Доказательство. 1) Применяем (2.3.2), 4), к $(V, f) = (\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$.

2) Предположим, что $\alpha \in \Delta$ и $m\alpha \in \Delta$. В силу (2.3.2), $2\langle m\alpha, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = 2m$ является целым числом. Если m — целое, то $m = \pm 1$, в силу (2.2.4). Предположим поэтому, что $m = 1/2 + m'$ $(m' \in \mathbb{Z})$, и постараемся прийти к противоречию. Поскольку $\pm m\alpha \in \Delta$, можно считать, что $m > 0$ и, значит, $m' \geqslant 0$. Пусть $m\alpha + i\alpha$ $(-j \leqslant i \leqslant k)$ есть α-последовательность, содержащая $m\alpha$. Тогда $k - j = -2\langle m\alpha, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = -2m = -1 - 2m'$ и $j = 2m' + 1 + k \geqslant m' \geqslant 0$. Следовательно, $m\alpha - m'\alpha = \alpha/2 \in \Delta$, в противоречие с тем, что $2(\alpha/2) \in \Delta$. □

(2.3.4) *Если* $\alpha \in \Delta$ *и* $\lambda \in \Lambda$, *то* $\langle\lambda, \alpha\rangle \in \mathbb{Q}$ *и* $\langle\alpha, \alpha\rangle$ — *положительное рациональное число.*

Доказательство. Согласно (2.3.2), если $\lambda + i\alpha$, $-j(\lambda, \alpha) \leqslant i \leqslant k(\alpha, \lambda)$, есть α-последовательность, содержащая λ, то

$$(4) \qquad \langle\lambda, \alpha\rangle = \frac{1}{2}(j(\lambda, \alpha) - k(\lambda, \alpha))\langle\alpha, \alpha\rangle.$$

Отсюда вытекает ввиду (2.2.5), что

$$\langle\alpha, \alpha\rangle = \sum_{\beta\in\Delta}\langle\beta, \alpha\rangle^2 = \frac{1}{4}\sum_{\beta\in\Delta}(j(\beta, \alpha) - k(\beta, \alpha))^2\langle\alpha, \alpha\rangle^2,$$

и, значит, $\langle\alpha, \alpha\rangle = 4\left(\sum_{\beta\in\Delta}(j(\beta, \alpha) - k(\beta, \alpha))^2\right)^{-1}$ — положительное рациональное число. Следовательно, в силу (4), $\langle\lambda, \alpha\rangle \in \mathbb{Q}$. □

Основные результаты о неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{sl}(2, P)$ являются простыми следствиями предложения 2.3.1. По этой причине мы включим их в данный параграф, не дожидаясь систематического изложения в гл. 7.

(2.3.5) *Для каждого* $j = 0, 1, 2, \ldots$ *существует единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление* f_j *алгебры* $\mathfrak{sl}(2, P)$ *размерности* $j + 1$. *Это представление* f_j *алгебры*

$$\mathfrak{sl}(2, P) = PH_\alpha + PE_\alpha + PE_{-\alpha}$$

задается формулами

$$(1) \qquad \begin{cases} H_\alpha v_k = \left(\frac{1}{2}j - k\right)\langle\alpha, \alpha\rangle \cdot v_k, \\ E_{-\alpha}v_k = v_{k-1}, \\ E_\alpha v_k = -\frac{1}{2}k(j - k + 1)\langle\alpha, \alpha\rangle \cdot v_k, \quad k = 0, 1, \ldots, j, \end{cases}$$

где $\{v_0, v_1, \ldots, v_j\}$ *— базис векторного пространства* V *над* P *и* $v_{-1} = v_{j+1} = 0$. *Совокупность* Λ_j *весов представления* f_j *относительно подалгебры Картана* PH_α *имеет вид*

$$\Lambda_j = \left\{\frac{1}{2} j\alpha, \left(\frac{1}{2} j - 1\right)\alpha, \ \ldots, \ -\frac{1}{2} j\alpha\right\}.$$

Доказательство. Пусть (V, f) — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{sl}(2, P)$. Так как множество весов относительно PH_α конечно, то существует вес λ, для которого $\lambda + \alpha$ не является весом. Применим предложение (2.3.1). Во введенных при его доказательстве обозначениях, легко проверяется, что $v\{_0, \ldots, v_j\}$ порождает ненулевое инвариантное подпространство W в V. Так как (V, f) неприводимо, то $W = V$. Из равенства $H_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ следует, что $\operatorname{tr} f(H_\alpha) = 0$, т. е.

$$\langle\lambda + (\lambda - \alpha) + \ldots + (\lambda - j\alpha), \alpha\rangle = (j + 1)\left\langle\lambda - \frac{1}{2} j\alpha, \ \alpha\right\rangle = 0,$$

откуда $\lambda = j\alpha/2$ (заметим, что подалгебра Картана PH_α одномерна).

Таким образом, мы убедились, что для каждой размерности существует не более одного (с точностью до эквивалентности) неприводимого представления f_j, причем это представление должно задаваться формулами (1). Прямое вычисление показывает, что формулы (1) действительно задают представление алгебры $\mathfrak{sl}(2, P)$. Проверим, что оно неприводимо. Обозначим через f_j' вполне приводимое представление, ассоциированное с f_j. Допустим, что f_i приводимо, тогда приводимо и f_j'. Поскольку всякое неприводимое представление алгебры $\mathfrak{sl}(2, P)$ есть представление вида f_j, имеем

$$f_j' = f_a \oplus f_b \oplus \ \ldots \ .$$

С другой стороны, каждое собственное подпространство для $f_j(H_\alpha)$ одномерно, и потому $\Lambda_a \cap \Lambda_b = \varnothing$, где через Λ_a и Λ_b обозначены множества весов представлений f_a и f_b соответственно. Поскольку $\Lambda_j = \{2^{-1}j\alpha, (2^{-1}j - 1)\alpha, \ldots, -2^{-1}j\alpha\}$ и Λ_a, Λ_b имеют аналогичный вид, это невозможно. Следовательно, представление f_j неприводимо. □

Замечание. Вес $2^{-1}j\alpha$ представления f_j называется *старшим весом* этого представления.

Упражнение 1. В § 2.2 мы показали, что корнями алгебры $\mathfrak{sl}(n, P)$ служат $a_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ (при $i \neq j$). Найти a_{ij}-последовательности, содержащие a_{st}.

Упражнение 2. В $\mathfrak{sl}(2, P)$ можно взять

$$H_\alpha\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

и старший вес соответствующего (естественного) представления алгебры $\mathfrak{sl}(2, P)$ равен $\alpha/2$.

2.4. Фундаментальная система корней и π-система

Мы сохраняем обозначения § 2.2 и 2.3. Пусть $\mathfrak{h}_0^*$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$, порожденное Δ в $\mathfrak{h}^*$.

(2.4.1) 1) $\dim_{\mathbb{Q}}\mathfrak{h}_0^* = \dim_P \mathfrak{h}^* = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$.

2) *Все веса принадлежат* $\mathfrak{h}_0^*$.

3) *Ограничение билинейной формы* $\langle\, ,\rangle$ *в* $\mathfrak{h}^*$ *на* $\mathfrak{h}_0^*$ *есть* $\mathbb{Q}$-*значная положительно-определенная форма.*

Доказательство. Выберем базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ в $\mathfrak{h}^*$, состоящий из элементов Δ (см. (2.2.2)). Тогда $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle \in \mathbb{Q}$, в силу (2.3.4), и $\det(\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle) \neq 0$. Пусть $\lambda = x_1\alpha_1 + \cdots + x_l\alpha_l$ $(x_i \in P)$ — вес. Тогда система линейных уравнений

(1) $\quad \langle\alpha_i, \alpha_j\rangle x_1 + \ldots + \langle\alpha_l, \alpha_j\rangle x_l = \langle\lambda, \alpha_j\rangle, \; j = 1, 2, \ldots, l,$

имеет рациональные коэффициенты и $\det(\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle) \neq 0$. Следовательно, $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{Q}$, т. е. $\lambda \in \mathbb{Q}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Q}\alpha_l$. В частности, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ порождают $\mathfrak{h}_0^*$. Так как, разумеется, набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ линейно-независим над $\mathbb{Q} \subset P$, то $\dim \mathfrak{h}_0^* = l$.

Далее, для $\lambda = x_1\alpha_1 + \cdots + x_l\alpha_l$ $(x_i \in \mathbb{Q})$ мы имеем

$$\langle\lambda, \lambda\rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} \langle\lambda, \alpha\rangle^2$$

и

$$\langle\lambda, \alpha\rangle = x_1\langle\alpha_1, \alpha\rangle + \ldots + x_l\langle\alpha_l, \alpha\rangle \in \mathbb{Q}.$$

Значит, $\langle\lambda, \lambda\rangle \geqslant 0$, и если $\langle\lambda, \lambda\rangle = 0$, то $\langle\lambda, \alpha\rangle = 0$ для всех $\alpha \in \Delta$, откуда следует, что $\lambda = 0$. Таким образом, эта билинейная форма положительно-определенна на $\mathfrak{h}_0^*$. □

Обозначим через $\mathfrak{h}_0$ векторное пространство над $\mathbb{Q}$, порожденное элементами H_α $(\alpha \in \Delta)$ из $\mathfrak{h}$. Легко видеть, что $\mathfrak{h}_0^*$ можно рассматривать как векторное пространство, сопряженное к $\mathfrak{h}_0$. Введем (лексикографическое) упорядочение в $\mathfrak{h}_0^*$, по отношению к фиксированному произвольному базису $\{H_1, \ldots, H_l\}$ пространства $\mathfrak{h}_0$, полагая $\lambda_1 > \lambda_2$ (или $\lambda_2 < \lambda_1$), если существует номер k $(0 \leqslant k \leqslant m - 1)$, такой что $\lambda_1(H_1) = \lambda_2(H_1), \ldots, \lambda_1(H_k) = \lambda_2(H_k)$ и $\lambda_1(H_{k+1}) > \lambda_2(H_{k+1})$. В случае когда $\lambda > 0$, мы говорим, что элемент λ положителен. Следующее предложение очевидно.

(2.4.2) 1) *Отношение $>$ является линейным упорядочением, т. е. для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{h}_0^*$ выполняется ровно одно из трех соотношений:* $\lambda_1 < \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$ *или* $\lambda_1 > \lambda_2$.

2) *Из* $\lambda_1 > \lambda_2$ *следует, что* $\lambda_1 + \lambda_3 > \lambda_2 + \lambda_3$, $-\lambda_1 < -\lambda_2$ *и* $r\lambda_1 > r\lambda_2$ *для* $r\ (> 0) \in \mathbb{Q}$.

Положим $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta\colon \alpha > 0\}$ и $\Delta^- = \{\alpha \in \Delta\colon \alpha < 0\} = \{-\alpha : \alpha \in \Delta^+\}$. Ясно, что $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ и $\Delta^+ \cap \Delta^- = \varnothing$.

Определение. Корень α из Δ^+ называется *простым*, если его нельзя записать в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta \in \Delta^+$, $\gamma \in \Delta^+$. (Например, наименьший положительный корень прост.)

Подмножество G в $\mathfrak{h}_0^*$ называется *ортогональной системой*, если каждый его элемент отличен от 0 и для любых $\lambda, \lambda' \in G$ $(\lambda \neq \lambda')$ выполняется равенство $\langle \lambda, \lambda' \rangle = 0$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — ортогональная система и $r_1\lambda_1 + \cdots + r_k\lambda_k = 0$ $(r_i \in \mathbb{Q})$, то $\langle \lambda_i, r_1\lambda_1 + \cdots + r_k\lambda_k \rangle = r_i \langle \lambda_i, \lambda_i \rangle = 0$, поэтому $r_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, всякая ортогональная система линейно-независима и содержит не более $l\ (= \dim \mathfrak{h}_0^*)$ элементов. Отсюда вытекает, что существует максимальная ортогональная система, скажем $\{e_1, \ldots, e_j\}$. Для любого $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ положим

$$\lambda_0 = \lambda - \sum_{i=1}^{j} \frac{\langle \lambda, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i.$$

Тогда $\langle \lambda_0, e_i \rangle = 0$ при $i = 1, \ldots, j$. Поскольку $\{e_1, \ldots, e_j\}$ — максимальная ортогональная система, мы заключаем, что $\lambda_0 = 0$, т. е. λ является линейной комбинацией элементов $e_1, \ldots, e_j$. Итак, мы доказали существование ортогонального базиса в $\mathfrak{h}_0^*$.

Поскольку $\mathfrak{h}_0^*$ — векторное пространство над $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, можно построить $(\mathfrak{h}_0^*)^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Скалярное произведение в $\mathfrak{h}_0^*$ может быть единственным образом продолжено до скалярного произведения в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, которое мы обозначим тем же символом. Пусть $e_1, \ldots, e_l$ — некоторый ортогональный базис в $\mathfrak{h}_0^*$. Ясно, что он будет базисом пространства $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ над $\mathbb{R}$. Следовательно, для $\lambda = \sum r_i e_i$ $(r_i \in \mathbb{R})$ мы имеем $\langle \lambda, \lambda \rangle = \sum r_i^2 \langle e_i, e_i \rangle \geqslant 0$, и из $\langle \lambda, \lambda \rangle = 0$ следует, что $\lambda = 0$. Таким образом, расширенное скалярное произведение в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ положительно-определенно.

Для $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ положим $\|\lambda\| = \sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle}$ и для любых $\lambda_1\ (\neq 0)$ и $\lambda_2\ (\neq 0)$ из $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ определим *угол* $\theta = \angle(\lambda_1, \lambda_2)$ между λ_1 и λ_2 $(0 \leqslant \theta \leqslant 180^\circ)$ условием $\cos\theta \cdot \|\lambda_1\| \cdot \|\lambda_2\| = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$. В дальнейшем, когда это нам будет нужно, *мы будем предполагать, что $\mathfrak{h}_0^*$ является подмножеством эвклидова пространства $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ с указанным расширенным скалярным произведением.* Например, для ненулевых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{h}_0^*$ мы будем рассматривать угол $\angle(\lambda_1, \lambda_2)$ между λ_1 и λ_2.

Определение. В пространстве $\mathbb{R}^l$ со скалярным произведением

$$\langle (x_1, \ldots, x_l), (y_1, \ldots, y_l) \rangle = \sum_{i=1}^{l} x_i y_i$$

подмножество D называется *корневой системой*, если

1) для любого $\alpha \in D$ мы имеем: $\alpha \neq 0$ и $\mathbb{R}\alpha \cap D = \{\pm\alpha\}$;

2) для любых $\alpha, \beta \in D$ мы имеем: $2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$ и $\beta - k\alpha \in D$ для всех целых чисел k, заключенных между 0 и $2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$.

В случае когда не оговорено противное, мы предполагаем, что D порождает $\mathbb{R}^l$.

Отождествим $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ с $\mathbb{R}^l$. Согласно (2.3.2), множество Δ, рассматриваемое как подмножество в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, удовлетворяет условию 2), а модифицируя доказательство предложения (2.3.3), 2), можно доказать и справедливость условия 1). Таким образом, Δ *является корневой системой.*

(2.4.3) *Пусть α и β — различные простые корни. Тогда*

1) $\langle\alpha, \beta\rangle \leqslant 0$, *т. е.* $\angle(\alpha, \beta) \geqslant 90^\circ$;

2) $\alpha - \beta \notin \Delta$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha - \beta \in \Delta$. Если $\alpha - \beta > 0$, то $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, что противоречит простоте α. Если $\alpha - \beta < 0$, то $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$, снова в противоречие с условием простоты корня β. Следовательно, $\alpha - \beta \notin \Delta$. Это означает, что β-последовательность, содержащая α, равна $\alpha, \alpha + \beta, \ldots, \alpha + k\beta$, где $k = -2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\beta, \beta\rangle$. Таким образом, $\langle\alpha, \beta\rangle \leqq 0$. □

(2.4.4) *Обозначим через π совокупность всех простых корней из Δ (относительно некоторого фиксированного упорядочения).*

1) $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ *образует базис в* $\mathfrak{h}_0^*$.

2) *Если* $\beta \in \Delta^+$, *то*

$$(*) \qquad \beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$, $n_i \geqslant 0$ *при* $i = 1, 2, \ldots, l$.

Доказательство. Допустим, что

$$r_1\alpha_1 + \ldots + r_s\alpha_s - r_{s+1}\alpha_{s+1} - \ldots - r_{s+t}\alpha_{s+t} = 0,$$

где $r_1, \ldots, r_{s+t}$ — положительные рациональные числа, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+t}$ — различные элементы из π. Положим

$$\gamma = r_1\alpha_1 + \ldots + r_s\alpha_s = r_{s+1}\alpha_{s+1} + \ldots + r_{s+t}\alpha_{s+t}.$$

Тогда $\langle\gamma, \gamma\rangle = \sum_{i,j} r_i r_{s+j} \langle\alpha_i, \alpha_{s+j}\rangle \leqslant 0$, ввиду (2.4.3), 1). С другой стороны, $\langle\gamma, \gamma\rangle \geqslant 0$, так что $\gamma = 0$. Следовательно, $r_1\alpha_1 + \ldots + r_s\alpha_s = 0$. Но из соотношений $r_i > 0$ и $\alpha_i > 0$ вытекает, что

$r_i\alpha_i > 0$ и $r_1\alpha_1 + \cdots + r_s\alpha_s > 0$, — противоречие. Итак, π — линейно-независимая система.

Докажем теперь 2). То что π порождает $\mathfrak{h}_0^*$, будет отсюда следовать. Предположим, что $\Delta^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_k$. Тогда $\beta_1 \in \pi$. Допустим, что все β_i имеют требуемый вид (*) при $i < j$, и рассмотрим β_j. Если $\beta_j \in \pi$, то все очевидно. Если β_j не является простым корнем, то $\beta_j = \beta_s + \beta_t$ ($s < j$ и $t < j$). Следовательно, по предположению индукции, β_s и β_t имеют вид (*), и, значит, тем же свойством обладает β_j. $\square$

Определение. Подмножество π множества Δ называется *фундаментальной системой корней*, если

1) $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ образует базис пространства $\mathfrak{h}_0^*$;

2) *всякое* $\beta \in \Delta$ *представимо в виде*

$$\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l \; (n_i \in \mathbb{Z}),$$

где все $n_i \geqslant 0$ или все $n_i \leqslant 0$.

Согласно (2.4.4), множество π всех простых корней (относительно некоторого фиксированного упорядочения) есть фундаментальная система корней. Покажем, что справедливо обратное.

(2.4.5) *Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система корней. Тогда π совпадает с совокупностью всех простых корней относительно некоторого лексикографического упорядочения $\mathfrak{h}_0^*$.*

Доказательство. Пусть $H_1, \ldots, H_l$ — базис в $\mathfrak{h}_0$, определенный формулой $\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Годится отвечающее ему упорядочение. $\square$.

Определение. Введем в $\mathbb{R}^l$ обычное скалярное произведение

$$\langle (x_1, \ldots, x_l), (y_1, \ldots, y_l)\rangle = \sum_{i=1}^{l} x_i y_i.$$

Подмножество $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ пространства $\mathbb{R}^l$ называется *π-системой*, если

1) набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ линейно-независим;

2) $c_{ij} = -2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle/\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle \in \mathbb{Z}$ при $i, j = 1, 2, \ldots, l$, причем $c_{ij} \geqslant 0$, если $i \neq j$.

Будем называть c_{ij} *числами Картана*, а матрицу (c_{ij}) — *матрицей Картана*. Всякую фундаментальную систему корней π можно рассматривать как π-систему.

(2.4.6) *Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система корней. Тогда множество $\{E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_l}, E_{-\alpha_1}, \ldots, E_{-\alpha_l}\}$ порождает $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть k — подалгебра, порожденная элементами $E_{\pm\alpha_i}$ ($i = 1, \ldots, l$). Так как $[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}] = -H_{\alpha_i}$ и множество $\{H_{\alpha_i}\}$ линейно-независимо, то подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ содержится в k. Допустим, что существует элемент $\beta \in \Delta^+$, для которого $E_\beta \notin k$.

Возьмем наименьший элемент β, обладающий этим свойством. Поскольку $\beta \notin \pi$, найдутся $\beta_1, \beta_2 \in \Delta^+$, такие что $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Тогда $E_{\beta_1}, E_{\beta_2} \in k$ и $[E_{\beta_1}, E_{\beta_2}] = N_{\beta_1, \beta_2} E_\beta \neq 0$, в силу (2.3.3). Мы пришли к противоречию. Следовательно, $E_\beta \in k$ для любого $\beta \in \Delta^+$. Аналогично если $\gamma \in \Delta^-$, то $E_\gamma \in k$. Поэтому $k = \mathfrak{g}$. □

π-система π называется *неразложимой*, если нельзя указать два непустых ее подмножества π_1 и π_2, таких что $\pi_1 \cup \pi_2 = \pi$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ и $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ для любых $\alpha_1 \in \pi_1$, $\alpha_2 \in \pi_2$.

(2.4.7) *Фундаментальная система корней π неразложима тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{g}$ проста.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha_1, \beta \in \pi$ и $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Мы знаем, что $\beta - \alpha \notin \Delta$. Пусть $\beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + k\alpha$ есть α-последовательность, содержащая β; тогда $k = -2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle = 0$. Следовательно, $\beta + \alpha \notin \pi$ и $[E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}] = 0$.

Допустим, что $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t\}$, где $\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = 0$. Обозначим через $\mathfrak{g}_1$ подалгебру, порожденную элементами $E_{\pm\alpha_j}$ $(i = 1, \ldots, s)$, а через $\mathfrak{g}_2$ — подалгебру, порожденную $E_{\pm\beta_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$. Ясно, что $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$ и $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ представляет собой подалгебру, порожденную $\{E_{\pm\alpha}: \alpha \in \pi\}$. В силу (2.4.6), $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — идеалы в $\mathfrak{g}$, причем идеал $\mathfrak{g}_1$ полупрост. Поскольку $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2] = 0$, мы имеем $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = 0$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (прямая сумма идеалов). Это доказывает, что если алгебра $\mathfrak{g}$ проста, то система π неразложима.

Докажем обратное. Пусть $\mathfrak{g}$ является прямой суммой двух идеалов $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_i \neq 0$, и пусть $\alpha \in \pi$. Предположим, что $E_\alpha = E_1 + E_2$, $E_i \in \mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2)$. Для $H \in \mathfrak{h}$ имеем $[H, E_\alpha] = [H, E_1] + [H, E_2] = \alpha(H) E_1 + \alpha(H) E_2$. Так как $[H, E_i] \in \mathfrak{g}_i$, то $[H, E_i] = \alpha(H) E_i$. Из того что $\dim \mathfrak{g}(\alpha) = 1$ и $E_1, E_2 \in \mathfrak{g}(\alpha)$, следует, что $E_1 = 0$ или $E_2 = 0$. Таким образом, каждый элемент E_α содержится в одном из идеалов $\mathfrak{g}_i$. Кроме того, из соотношения $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha \neq 0$ вытекает, что если $E_\alpha \in \mathfrak{g}_i$, то $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_i$ и $H_\alpha \in \mathfrak{g}_i$. Допустим, что $E_\alpha \in \mathfrak{g}_1$ и $E_\beta \in \mathfrak{g}_2$. Тогда $[H_\alpha, E_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle E_\beta = 0$, и потому $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Пусть $\pi_i = \{\alpha \in \pi: E_\alpha \in \mathfrak{g}_i\}$, $i = 1, 2$. Если $\pi_1 = \varnothing$, то, согласно (2.4.6), $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$ — противоречие. Значит, $\pi_1 \neq \varnothing$ и $\pi_2 \neq \varnothing$. □

Упражнение 1. Найти фундаментальную систему корней для $\mathfrak{sl}(n, P)$, $n \geqslant 2$. [*Ответ*: $a_{i, i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.]

Упражнение 2. Пусть $\mathfrak{h}_0^*$ — линейно упорядоченное векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с отношением порядка $>$, удовлетворяющим условиям 1) и 2) из (2.4.2). Тогда $>$ является лексикографическим упорядочением относительно некоторого базиса в $\mathfrak{h}_0$.

Упражнение 3. Можно дать определение неразложимой корневой системы аналогично тому, как это было сделано для π-систем. Доказать аналог теоремы (2.4.7) для произвольной корневой системы Δ.

Упражнение 4. В определении корневой системы условие 2) может быть заменено более слабым условием

2′) для любых $\alpha, \beta \in D$ мы имеем: $2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$ и $\beta - 2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle \in D$.

Доказательство будет дано в § 5.1.

2.5. Классификация π-систем

Две π-системы $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ и $\bar{\pi} = \{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_l\}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $\pi \cong \bar{\pi}$), если соответствующие числа Картана у них совпадают. Если существует положительное вещественное число r, такое что $\bar{\alpha}_i = r\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, то $\pi \cong \bar{\pi}$. Найдем все (с точностью до эквивалентности) неразложимые π-системы.

Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — некоторая π-система. Используя обозначение $\cos\alpha\beta = \cos\angle(\alpha, \beta)$, мы имеем при $i \neq j$

$$c_{ij}c_{ji} = \frac{4\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle^2}{\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle} = 4\cos^2\alpha_i\alpha_j.$$

Так как $|\cos\alpha_i\alpha_j| < 1$, то $c_{ij}c_{ji} = 0, 1, 2, 3$. Предположим, что $\|\alpha_i\| \geqslant \|\alpha_j\|$.

Случай 1: $c_{ij}c_{ji} = 1$. Тогда $c_{ij} = c_{ji} = 1$, т. е.

$$\frac{-2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle} = \frac{-2\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} = 1.$$

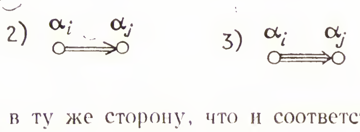
Следовательно, $\|\alpha_i\| = \|\alpha_j\|$. Из равенства $4\cos^2\alpha_i\alpha_j = 1$ мы получаем, что $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = 120°$.

Случай 2: $c_{ij}c_{ji} = 2$. Аналогично предыдущему имеем $c_{ij} = 2$, $c_{ji} = 1$, а потому $\|\alpha_i\|^2 = 2\|\alpha_j\|^2$ и $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = 135°$.

Случай 3: $c_{ij}c_{ji} = 3$. Имеем $c_{ij} = 3$, $c_{ji} = 1$, поэтому $\|\alpha\|^2 = 3\|\alpha_j\|^2$ и $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = 150°$.

Случай 0: $c_{ij}c_{ji} = 0$. Тогда $\angle(\alpha_i, \alpha_j) = 90°$ и $c_{ij} = c_{ji} = 0$, однако о длинах векторов никакой информации мы не получаем.

Диаграмма Дынкина $D(\pi)$ системы π состоит из l вершин (изображаемых в виде маленьких кружков), по одной на каждое $\alpha_i \in \pi$, и некоторого множества отрезков, соединяющих эти вершины. Мы проводим 0, 1, 2 или 3 линии от α_i к α_j в соответствии с тем, $c_{ij}c_{ji} = 0, 1, 2$ или 3. В случаях 2 и 3 стрелкой указывается соотношение длин векторов α_i и α_j[1]. Таким образом, перечисленным выше случаям отвечают диаграммы



[1] Стрелка смотрит в ту же сторону, что и соответствующий знак неравенства. — *Прим. ред.*

Говорят, что два элемента α, β системы π *связаны* между собой, если $\langle\alpha, \beta\rangle \neq 0$. Подмножество D_1 в $D(\pi)$ называется *связным*, если для любых $\alpha, \beta \in D_1$ найдется последовательность $\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k = \beta$ в D_1, такая, что элементы γ_i, γ_{i+1} связаны между собой для $i = 0, \ldots, k-1$. Ясно, что диаграмма $D(\pi)$ связна тогда и только тогда, когда система π неразложима. Далее, если диаграммы $D(\pi)$ и $D(\bar{\pi})$ изоморфны в очевидном смысле, то $\pi \cong \bar{\pi}$, так как приведенные выше диаграммы 0) — 3) однозначно определяют значения c_{ij}.

(2.5.1) *Для всякой π-системы $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ число пар вершин, связанных друг с другом, не превосходит $l - 1$.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i/\|\alpha_i\|) \neq 0$. Имеем

$$0 < \langle\gamma, \gamma\rangle = \sum_{i=1}^{l} \frac{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle}{\|\alpha_i\|\cdot\|\alpha_i\|} + 2\sum_{i<j} \frac{\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\|\alpha_i\|\cdot\|\alpha_j\|} = l + \sum_{i<j} \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\|\alpha_i\|\cdot\|\alpha_j\|},$$

откуда

$$\sum_{i<j} \frac{-2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\|\alpha_i\|\cdot\|\alpha_j\|} < l.$$

С другой стороны, если α_i и α_j связаны между собой, то, предполагая для определенности, что $\|\alpha_i\| \geqslant \|\alpha_j\|$, будем иметь

$$\frac{-2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\|\alpha_i\|\cdot\|\alpha_j\|} \geqslant \frac{-2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\|\alpha_i\|^2} = c_{ji} \geqslant 1. \ \square$$

Заметим, что каждое подмножество π-системы можно рассматривать как π-систему.

(2.5.2) *Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — некоторая π-система.*

1) *$D(\pi)$ не имеет циклов, т. е. подмножеств $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, таких что $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle \neq 0, \ldots, \langle\alpha_{k-1}, \alpha_k\rangle \neq 0$ и $\langle\alpha_k, \alpha_1\rangle \neq 0$.*

2) *Пусть D_1 — связное подмножество в $D(\pi)$. Если $\alpha \in D(\pi)$ и $\alpha \notin D_1$, то существует не более одного $\beta \in D_1$, связанного с α.*

3) *Через каждую вершину проходит не более трех отрезков.*

4) *Если π неразложима и $l \geqslant 3$, то $D(\pi)$ не содержит подмножеств вида*

.

Доказательство. 1) Если $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — цикл, т. е. $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle \neq 0, \ldots, \langle\alpha_{k-1}, \alpha_k\rangle \neq 0$, $\langle\alpha_k, \alpha_1\rangle \neq 0$, то π-система $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ имеет по крайней мере k пар связанных друг с другом вершин.

2) Если α связано с $\beta_1, \beta_2 \in D_1$ $(\beta_1 \neq \beta_2)$, то мы имеем цикл.

3) Пусть β принадлежит π и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — вершины, связанные с β. Если α_i и α_j связаны между собой при $i \neq j$, то $D(\pi)$

содержит цикл, что невозможно. Следовательно, $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 0$ при $i, j = 1, 2, \ldots, k$ и $i \neq j$. Пусть α_0 $(\neq 0)$ — вектор в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$, порожденном векторами $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, удовлетворяющий условию $\langle\alpha_0, \alpha_i\rangle = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Тогда $\sum_{i=0}^{k} \cos^2 \beta\alpha_i = 1$. Так как множество $\{\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ линейно-независимо, то

$$\langle\beta, \alpha_0\rangle \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} 4\cos^2\beta\alpha_i < 4.$$

С другой стороны, $4\cos^2\beta\alpha_i = 1, 2, 3$ есть число отрезков, соединяющих β с α_i.

4) Если вершины α и β соединены тремя отрезками, то, в силу 3), они не могут быть соединены ни с одной другой вершиной. $\square$

Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — некоторая π-система. Подмножество $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ называется *однородной цепью*, если $c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$, т. е. соответствующая часть диаграммы системы имеет вид

(2.5.3) *Пусть в π-системе $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_j\}$ подмножество $C = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ есть однородная цепь. Тогда фактор-система $\pi/C = \{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_j\}$, где $\alpha = \alpha_1 + \ldots \alpha_k$, также является π-системой. Диаграмма $D(\pi/C)$ получается следующим образом. Между вершинами β_s и β_t проводятся те же отрезки, что и в $D(\pi)$. Каждая вершина β_s соединена в $D(\pi)$ не более чем с одной из вершин α_i; если β_s не соединена в $D(\pi)$ ни с одной из α_i, то мы не соединяем β_s с α, а если β_s соединена с α_i, то соединяем ее с α точно так же, как она была соединена с α_i в $D(\pi)$.*

Доказательство. Если вершина β_s соединена с α_t, то

$$\frac{-2\langle\alpha_1 + \ldots + \alpha_k, \beta_s\rangle}{\langle\beta_s, \beta_s\rangle} = \frac{-2\langle\alpha_t, \beta_s\rangle}{\langle\beta_s, \beta_s\rangle}.$$

Так как $\|\alpha_1\| = \ldots = \|\alpha_k\|$ и

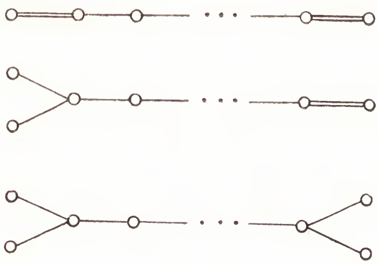
$$\|\alpha_1 + \ldots + \alpha_k\|^2 = 2\sum_{i=1}^{k-1}\langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle + \sum_{i=1}^{k}\|\alpha_i\|^2,$$

то, используя равенство $-2\langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle/\|\alpha_i\|^2 = 1$, получаем

$$\|\alpha_1 + \ldots + \alpha_k\|^2 = (k-1)\|\alpha_1\|^2 + k\|\alpha_1\|^2 = \|\alpha_1\|^2.$$

Следовательно, $-2\langle\alpha, \beta_s\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = -2\langle\alpha_t, \beta_s\rangle/\langle\alpha_t, \alpha_t\rangle$. $\square$

(2.5.4) Диаграммы



не могут быть подмножествами диаграммы Дынкина.

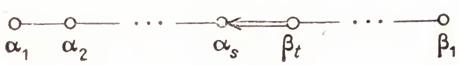
Доказательство. Рассматривая соответствующие фактордиаграммы, можно найти вершину, через которую проходят 4 отрезка. ▯

Используя доказанные выше леммы, мы получим сейчас классификацию неразложимых π-систем с точностью до эквивалентности. В случае $l = 1$ существует только одна диаграмма  .

При $l = 2$ имеем три диаграммы: ,  и  .

Предположим теперь, что $l \geqslant 3$.

Случай 1. Диаграмма $D(\pi)$ содержит  . Тогда она должна иметь вид



Так как $\|\alpha_1\|^2 = \ldots = \|\alpha_s\|^2$ и $\|\beta_1\|^2 = \ldots = \|\beta_t\|^2 = 2\|\alpha_1\|^2$, то, меняя при необходимости масштаб, мы можем предполагать что $\|\alpha_i\|^2 = 1$ и $\|\beta_j\|^2 = 2$. В силу равенства

$$\frac{-2\langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle}{\|\alpha_i\|^2} = 1$$

имеем $\langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle = -1/2$. Аналогично $\langle\beta_j, \beta_{j+1}\rangle = -1$ и $\langle\alpha_s, \beta_t\rangle = -1$. Пусть $\alpha = \sum_{i=1}^{s} i\alpha_i$ и $\beta = \sum_{j=1}^{t} j\beta_j$. Тогда

$$\langle\alpha, \alpha\rangle = \sum_{i=1}^{s} i^2\|\alpha_i\|^2 + 2\sum_{i=1}^{s-1} i(i+1)\langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{s} i^2 - \sum_{i=1}^{s-1} i(i+1) = \frac{s(s+1)}{2}.$$

Аналогично $\langle \beta, \beta \rangle = t(t+1)$, а $\langle \alpha, \beta \rangle = -st$. С другой стороны, поскольку α и β линейно-независимы, $\langle \alpha, \beta \rangle^2 < \| \alpha \|^2 \| \beta \|^2$, т. е.

$$s^2 t^2 < \frac{s(s+1)}{2} t(t+1).$$

Отсюда получаем, что $(s-1)(t-1) < 2$.

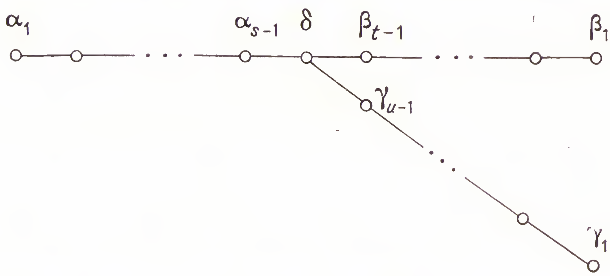
Поскольку s и t — положительные числа, возможны лишь три случая:

1) $s = 1$, а t произвольно;
2) $t = 1$, а s произвольно;
3) $s = t = 2$.

Случай 2. Диаграмма $D(\pi)$ не имеет подмножеств вида  .

Если ни через одну вершину не проходит трех отрезков, то имеется единственная возможность:

В противном случае $D(\pi)$ должна иметь вид



Мы можем считать, не теряя общности, что $\| \alpha_i \| = \| \beta_j \| = \| \gamma_k \| = \| \delta \| = 1$ и $s \geqslant t \geqslant u \geqslant 2$. Положим

$$\alpha = \sum_{i=1}^{s-1} i\alpha_i, \quad \beta = \sum_{j=1}^{t-1} j\beta_j, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{u-1} k\gamma_k.$$

Тогда

$$\| \alpha \|^2 = \frac{1}{2} s(s-1), \quad \| \beta \|^2 = \frac{1}{2} t(t-1), \quad \| \gamma \|^2 = \frac{1}{2} u(u-1),$$

$$\langle \alpha, \delta \rangle = -\frac{1}{2}(s-1), \quad \langle \beta, \delta \rangle = -\frac{1}{2}(t-1), \quad \langle \gamma, \delta \rangle = -\frac{1}{2}(u-1).$$

Так как векторы α, β, γ взаимно ортогональны, то найдется ортогональный базис $e_1, \ldots, e_l$ в $\mathbb{R}^l$, такой что $e_1 = \alpha$, $e_2 = \beta$ и $e_3 = \gamma$.

Поскольку множество $\{e_1, e_2, e_3, \delta\}$ линейно-независимо, найдется номер $i > 3$, для которого $\langle \delta, e_i \rangle \neq 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{3} \cos^2 e_i\delta < \sum_{i=1}^{l} \cos^2 e_i\delta = 1.$$

С другой стороны,

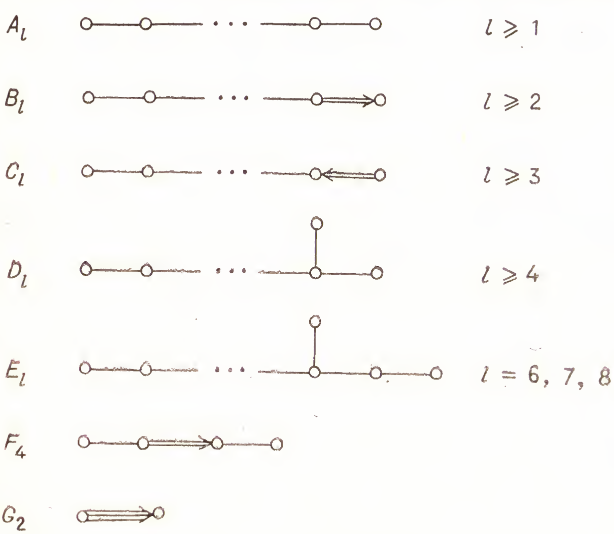
$$\cos^2 \alpha\beta = \frac{\langle \delta, \alpha \rangle^2}{\| \delta \|^2 \cdot \| \alpha \|^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)$$

и $\cos^2 \beta\delta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$, $\cos^2 \gamma\delta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{u}\right)$. Таким образом, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{u}\right) < 1$, откуда $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} > 1$. Поскольку $u \geqslant 2$, то $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} > \frac{1}{2}$. Из того, что $s \geqslant t$, следует, что $\frac{2}{t} > \frac{1}{2}$, т. е. $t < 4$. Значит, $t = 2$ или $t = 3$.

Если $t = 2$, то $u = 2$, а s произвольно.

Если $t = 3$, то из неравенства $\frac{1}{s} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ мы получаем, что $s < 6$ и, следовательно, $s = 3$, 4 или 5. В таком случае из неравенства $\frac{1}{u} > 1 - \frac{1}{s} - \frac{1}{t}$ вытекает, что $u = 2$. Это исчерпывает все возможности. Подытожим полученные результаты:

(2.5.5) *Теорема.* *Пусть* π *— неразложимая* π*-система. Тогда диаграмма Дынкина* $D(\pi)$ *совпадает с одной из следующих диаграмм:*



Найдем π-системы, соответствующие диаграммам A_l, B_l, C_l и D_l.

1) A_l: Пусть $e_1, \ldots, e_{l+1}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{l+1}$, т. е. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Положим $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, l$). Тогда набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ линейно-независим и $\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle = 2$ ($i = 1, 2, \ldots, l$), $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle = -1$ ($i = 1, 2, \ldots, l-1$), $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle = 0$, если $j \neq i-1$, $i, i+1$. Система $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ является π-системой с диаграммой A_l.

2) B_l, C_l, D_l: Пусть $e_1, \ldots, e_l$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^l$. Полагая $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$, и

для $B_l : \alpha_l = e_l$,

для $C_l : \alpha_l = 2e_l$,

для $D_l : \alpha_l = e_{l-1} + e_l$,

получим π-системы с диаграммами B_l, C_l и D_l.

Фактически, все диаграммы Дынкина реализуются как π-системы.

Упражнение 1. Найти π-системы для G_2 и F_4 (хорошо бы и для E_6, E_7, E_8).

Упражнение 2. Преобразование, отвечающее невырожденной матрице θ из $\mathfrak{gl}(l, \mathbb{R})$, называется *преобразованием подобия*, если $\langle \theta u, \theta v\rangle = r\langle u, v\rangle$ ($u, v \in \mathbb{R}^l$) для некоторого положительного r. Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ и $\bar\pi = \{\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_l\}$ — неразложимые π-системы. Если $\pi \simeq \bar\pi$, т. е.

$$c_{ij} = \frac{-2\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} = \frac{-2\langle \bar\alpha_i, \bar\alpha_j\rangle}{\langle \bar\alpha_j, \bar\alpha_j\rangle} = \bar c_{ij},$$

то отображение θ, определенное формулой $\theta(\sum x_i\alpha_i) = \sum x_i\bar\alpha_i$ ($x_i \in \mathbb{R}$), является преобразованием подобия (и обратно).

2.6. Классификация простых алгебр Ли

Представляется уместным задержаться здесь для небольшого отступления. Всякая подалгебра Картана данной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяет разложение $\mathfrak{g}$ по корневым подпространствам и фундаментальную систему корней. Эту фундаментальную систему можно рассматривать как π-систему, и мы только что завершили классификацию последних. Цель данного параграфа — показать, что классификация простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем P характеристики 0 совпадает с классификацией π-систем (см. (2.6.6)). На протяжении этого параграфа $\mathfrak{g}$ обозначает полупростую алгебру Ли. Мы сохраняем обозначения, введенные в §§ 2.4 и 2.5.

(2.6.1) *Если $\beta \in \Delta^+$ и $\beta \notin \pi$, то существуют элементы $\alpha \in \pi$ и $\gamma \in \Delta^+$, такие что $\beta = \gamma + \alpha$. При этом α-последовательность, содержащая β, т. е. содержащая γ, содержится в Δ^+.*

Доказательство. Допустим, что $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$ ($n_i \geqslant 0$). Поскольку $\langle \beta, \beta\rangle = n_1\langle \alpha_1, \beta\rangle + \ldots + n_l\langle \alpha_l, \beta\rangle$ — положительное число, то существует номер i, для которого $n_i\langle \alpha_i, \beta\rangle > 0$. Отсюда следует ввиду (2.3 2), что $\beta - \alpha_i \in \Delta$, а так как $n_i \geqslant 1$,

мы заключаем, что $\beta - \alpha_i > 0$. Если $\beta - j\alpha_i = n_1\alpha_1 + \ldots + (n_i - j)\alpha_i + \ldots + n_l\alpha_l \in \Delta\,(j > 0)$, то, поскольку существует $k \neq i$, для которого $n_k > 0$, мы имеем $n_i \geqslant j$ и $\beta - j\alpha_i > 0$. □

(2.6.2) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$, корневой системой $\Delta \subset \mathfrak{h}_0^*$ и фундаментальной системой $\pi \subset \Delta$. Пусть, далее, $\bar{\mathfrak{g}}$ — полупростая алгебра Ли с подалгеброй Картана $\bar{\mathfrak{h}}$, корневой системой $\bar{\Delta} \subset \bar{\mathfrak{h}}_0^*$ и фундаментальной системой $\bar{\pi} \subset \bar{\Delta}$. Если $\pi \cong \bar{\pi}$, то этот изоморфизм допускает естественное продолжение до линейного изоморфизма φ из $\mathfrak{h}_0^*$ на $\bar{\mathfrak{h}}_0^*$, такого что $\varphi(\Delta) = \bar{\Delta}$ и*

$$\langle \varphi(\lambda),\ \varphi(\mu)\rangle = \langle \lambda,\ \mu\rangle \text{ для } \lambda,\ \mu \in \mathfrak{h}_0^*.$$

Доказательство. Предположим, что $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, $\bar{\pi} = \{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_l\}$ и

$$\frac{\langle \alpha_i,\ \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j,\ \alpha_j\rangle} = \frac{\langle \bar{\alpha}_i,\ \bar{\alpha}_j\rangle}{\langle \bar{\alpha}_j,\ \bar{\alpha}_j\rangle} \quad \text{при } i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l,$$

и зададим φ равенством

$$\varphi(r_1\alpha_1 + \ldots + r_l\alpha_l) = r_1\bar{\alpha}_1 + \ldots + r_l\bar{\alpha}_l \quad (r_i \in \mathbb{Q}).$$

Для любого элемента $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l \in \Delta$ определим его *высоту* $|\beta|$ формулой $|\beta| = |n_1 + \ldots + n_l| = |n_1| + \ldots + |n_l|$ и положим $\Delta_s = \{\beta \in \Delta\colon\ |\beta| \leqslant s\}$, $s = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $\Delta_1 = \{\pm\alpha\colon \alpha \in \pi\}$ и $\Delta_s = \Delta$ для достаточно больших s. Аналогично определим $\bar{\Delta}_s$. Докажем индукцией по s, что $\varphi(\Delta_s) = \bar{\Delta}_s$. Для $s = 1$ это очевидно. Поэтому предположим, что $\varphi(\Delta_{s-1}) = \bar{\Delta}_{s-1}$, и покажем, что $\varphi(\Delta_s) = \bar{\Delta}_s$ $(s \geqslant 2)$. Очевидно, достаточно установить, что $\varphi(\Delta_s \cap \Delta^+) \subset \bar{\Delta}$. Допустим, что $\beta \in \Delta$, $|\beta| = s$ и $\beta > 0$. Согласно (2.6.1), найдется элемент $\alpha_i \in \pi$, для которого $\beta - \alpha_i = \gamma \in \Delta^+$. Так как $\gamma \in \Delta_{s-1}$, то по предположению индукции $\varphi(\gamma) \in \bar{\Delta}_{s-1}$. Пусть $\gamma - j\alpha_i, \ldots, \gamma, \gamma + \alpha_i, \ldots, \gamma + k\alpha_i$ есть α_i-последовательность, содержащая γ, и пусть $\varphi(\gamma) - \bar{j}\bar{\alpha}, \ldots \varphi(\gamma), \varphi(\gamma) + \bar{\alpha}_i, \ldots, \varphi(\gamma) + \bar{k}\bar{\alpha}_i$ есть $\bar{\alpha}_i$-последовательность, содержащая $\alpha(\gamma)$. Так как из равенства $\gamma = \sum n_t\bar{\alpha}_t$ следует, что $\varphi(\gamma) = \sum n_t\bar{\alpha}_t$, то

$$\frac{\langle \gamma,\ \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i,\ \alpha_i\rangle} = \frac{\langle \varphi(\gamma),\ \bar{\alpha}_i\rangle}{\langle \bar{\alpha}_i,\ \bar{\alpha}_i\rangle}.$$

Применяя (2.3.2), получаем $k - j = \bar{k} - \bar{j}$. Но из предположения индукции следует, что $j = \bar{j}$. Значит, $\bar{k} = k \geqslant 1$ и $\varphi(\gamma) + \bar{\alpha}_i = \varphi(\beta) \in \bar{\Delta}$.

Для доказательства нашего последнего утверждения мы вначале предположим, что система π неразложима. Тогда для любых

α, β из π найдется такая последовательность $\alpha_1 = \alpha$, α_2, ..., $\alpha_t = \beta$ в π, что $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, t-1$. Поскольку

$$\frac{\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_{i+1} \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle} = \frac{\langle \bar{\alpha}_{i+1}, \bar{\alpha}_{i+1} \rangle}{\langle \alpha_{i+1}, \alpha_{i+1} \rangle},$$

можно найти $r \in \mathbb{Q}$, такое что $\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i \rangle = r \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$ для $i = 1, 2, \ldots, t$. Следовательно, $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle = r \langle \alpha, \alpha \rangle$ для всех α из π. Так как

$$\frac{\langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_i \rangle}{\langle \bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i \rangle} = \frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle},$$

то $\langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_i \rangle = r \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ при $i, j = 1, 2, \ldots, l$. Значит, $\langle \varphi(\lambda), \varphi(\mu) \rangle = r \langle \lambda, \mu \rangle$ для $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_0^*$ (см. упр. 2 § 2.5).

С другой стороны, согласно (2.2.5), 6),

$$\langle \varphi(\lambda), \varphi(\mu) \rangle = \sum_{\gamma \in \Delta} \langle \varphi(\lambda), \varphi(\gamma) \rangle \langle \varphi(\mu), \varphi(\gamma) \rangle$$

$$= r^2 \sum_{\gamma \in \Delta} \langle \lambda, \gamma \rangle \langle \mu, \gamma \rangle = r^2 \langle \lambda, \gamma \rangle.$$

Поэтому $r^2 = r$ и $r = 1$. Таким образом, в случае когда система π неразложима, $\langle \varphi(\lambda), \varphi(\mu) \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle$.

Если система π не неразложима, то она является объединением своих попарно непересекающихся неразложимых подмножеств $\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(u)}$. Пусть $\mathfrak{h}_0^{*\,(i)}$ обозначает векторное подпространство в $\mathfrak{h}_0^*$, порожденное $\pi^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, u$. Так как из условий $\alpha^{(i)} \in \pi^{(i)}$, $\alpha^{(j)} \in \pi^{(j)}$, $i \neq j$, следует, что $\langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)} \rangle = 0$, то $\mathfrak{h}_0^{*\,(i)}$ ортогонально к $\mathfrak{h}_0^{*\,(j)}$ и

$$\mathfrak{h}_0^* = \mathfrak{h}_0^{*\,(1)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}_0^{*\,(u)}.$$

Поэтому наша задача легко сводится к случаю, когда система π неразложима. $\square$

Теперь займемся исследованием чисел $N_{\alpha,\beta}$, определенных соотношением $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ при $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$. Нам уже известно, что $N_{\alpha,\beta} \neq 0$, в силу (2.3.3). Для удобства несколько расширим определение чисел $N_{\alpha,\beta}$. А именно положим $N_{\lambda,\mu} = 0$, если $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_0^*$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda + \mu \neq 0$ и по крайней мере один из элементов λ, μ, $\lambda + \mu$ не является корнем. Напомним, что E_α у нас выбраны так, что $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1$.

(2.6.3) 1) *Если α, β, γ — ненулевые элементы из $\mathfrak{h}_0^*$, удовлетворяющие условию $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то*

$$N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\gamma} = N_{\gamma,\alpha}.$$

2) *Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ принадлежат Δ и $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \gamma \neq 0$, $\alpha + \delta \neq 0$, то*

$$N_{\alpha,\beta} N_{\gamma,\delta} + N_{\beta,\gamma} N_{\alpha,\delta} + N_{\gamma,\alpha} N_{\beta,\delta} = 0.$$

Доказательство. 1) Так как $\alpha + \beta \neq 0$, $\beta + \gamma \neq 0$, $\alpha + \gamma \neq 0$, то $N_{\alpha,\beta}$, $N_{\beta,\gamma}$ и $N_{\gamma,\alpha}$ определены. Если хотя бы один из элементов α, β, γ не принадлежит Δ, то $N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\gamma} = N_{\gamma,\alpha} = 0$. Мы можем поэтому предполагать, что $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$. Из равенства $B([E_\alpha, E_\beta], E_\gamma) + B(E_\beta, [E_\alpha, E_\gamma]) = 0$ получаем $N_{\alpha,\beta}B(E_{-\gamma}, E_\gamma) + N_{\alpha,\gamma}B(E_\beta, E_{-\beta}) = -N_{\alpha,\beta} - N_{\alpha,\gamma} = 0$. Следовательно, $N_{\alpha,\beta} = -N_{\alpha,\gamma} = N_{\gamma,\alpha}$. Аналогично $N_{\beta,\gamma} = N_{\alpha,\beta}$.

2) Из равенства $[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] + [E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]] + [E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]] = 0$ следует, что $N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma} + N_{\gamma,\alpha}N_{\beta,\gamma+\delta} + N_{\alpha,\beta}N_{\gamma,\alpha+\beta} = 0$. С другой стороны, из того, что $\alpha + (\beta + \gamma) + \delta = 0$, следует, согласно 1), что $N_{\alpha,\beta+\gamma} = N_{\delta,\alpha} = -N_{\alpha,\delta}$, и т. д. □

(2.6.4) *Предположим, что α, β и $\alpha + \beta$ принадлежат Δ. Если $\beta + i\alpha$ $(-j \leqslant i \leqslant k)$ есть α-последовательность корней, содержащая β, то*

$$M_{\alpha,\beta} = N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = \frac{1}{2}(j+1)k\langle\alpha, \alpha\rangle.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \beta - j\alpha$ и $v_i = (\operatorname{ad} E_\alpha)^i E_\gamma$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ В формуле (2) из доказательства предложения (2.3.1) заменим λ на γ, α на $-\alpha$, k на $j+1$ и получим

$$(\operatorname{ad} E_{-\alpha})(\operatorname{ad} E_\alpha) v_j = -(j+1)\left(\langle\gamma, -\alpha\rangle - \frac{1}{2}j\langle\alpha, \alpha\rangle\right)v_j$$

$$= (j+1)\left\langle\gamma + \frac{1}{2}j\alpha, \alpha\right\rangle v_j = (j+1)\left\langle\beta - \frac{1}{2}j\alpha, \alpha\right\rangle v_j$$

$$= -\frac{1}{2}(j+1)k\langle\alpha, \alpha\rangle v_j$$

(мы воспользовались тем, что $-2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = k - j$).

Так как $v_j \in \mathfrak{g}(\beta)$ и $v_j \neq 0$, то $v_j = rE_\beta$ $(r \neq 0)$. Следовательно, $[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]] = -2^{-1}(j+1)k\langle\alpha, \alpha\rangle E_\beta$. С другой стороны,

$$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]] = N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}E_\beta = -N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta}E_\beta.$$

Поэтому $M_{\alpha,\beta} = N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = \frac{1}{2}(j+1)k\langle\alpha, \alpha\rangle$. □

(2.6.5) *Из каждого подпространства $\mathfrak{g}(\alpha)$ можно выбрать вектор E_α таким образом, чтобы*

1) $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1$;

2) $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ *при* $\alpha, \beta \in \Delta$.

Доказательство. Для $\gamma \in \Delta^+$ положим $\Delta_\gamma = \{\alpha \in \Delta\colon -\gamma < \alpha < \gamma\}$. Предположим, что условие 1) выполнено для всех $\alpha \in \Delta$ и что, если $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ принадлежат Δ_γ, то $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$.

Если в Δ_γ найдутся элементы α, β, такие что $\alpha + \beta = \gamma$ и

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_\gamma, \quad [E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = N_{-\alpha,-\beta}E_{-\gamma},$$

то, обозначив один из квадратных корней из $M_{\alpha,\beta}$ через $\sqrt{M_{\alpha,\beta}}$, положим

$$E'_\gamma = \frac{N_{\alpha,\beta}}{\sqrt{M_{\alpha,\beta}}} E_\gamma \quad \text{и} \quad E'_{-\gamma} = \frac{N_{-\alpha,-\beta}}{\sqrt{M_{\alpha,\beta}}} E_{-\gamma}.$$

Тогда $[E_\alpha, E_\beta] = \sqrt{M_{\alpha,\beta}} E'_\gamma$ и $[E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = \sqrt{M_{\alpha,\beta}} E'_{-\gamma}$. Так как $M_{\alpha,\beta} = N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,-\beta}$, то $B(E'_\gamma, E'_{-\gamma}) = B(E_\gamma, E_{-\gamma}) = -1$. Поэтому, изменяя, если надо, обозначения, мы можем считать, что $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$.

Допустим, что в Δ_γ есть еще одна пара α', β', для которой $\alpha' + \beta' = \gamma$. Докажем, что $N_{\alpha',\beta'} = N_{-\alpha',-\beta'}$. Поскольку $\alpha + \beta + (-\alpha') + (-\beta') = 0$ и $\alpha \neq \alpha'$, $\alpha \neq \beta'$, $\alpha + \beta \neq 0$, мы можем применить (2.6.3), 2):

$$N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha',-\beta'} + N_{\beta,-\alpha'} N_{\alpha,-\beta'} + N_{-\alpha',\alpha} N_{\beta,-\beta'} = 0,$$

$$N_{-\alpha,-\beta} N_{\alpha',\beta'} + N_{-\beta,\alpha'} N_{-\alpha,\beta'} + N_{\alpha',-\alpha} N_{-\beta,\beta'} = 0.$$

Так как $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, очевидно, положительны, то, если какой-то из элементов $\pm(\beta - \alpha')$, $\pm(\alpha - \beta')$, $\pm(\alpha - \alpha')$, $\pm(\beta - \beta')$ является корнем, он принадлежит Δ_γ. Следовательно, $N_{\beta,-\alpha'} = N_{-\beta,\alpha'}$ и т. д. Кроме того, $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} \neq 0$. Поэтому $N_{\alpha',\beta'} = N_{-\alpha',-\beta'}$.

Таким образом, наше утверждение может быть получено индукцией относительно упорядочения в Δ^+. $\square$

(2.6.6) Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли с фундаментальной системой корней π и $\bar{\mathfrak{g}}$ — полупростая алгебра Ли с функциональной системой корней $\bar{\pi}$. Если $\pi \cong \bar{\pi}$, то $\mathfrak{g} \cong \bar{\mathfrak{g}}$.*

Доказательство. Мы сохраняем обозначения из (2.6.2). Определим линейное отображение θ из $\mathfrak{h}$ в $\bar{\mathfrak{h}}$ условием $\varphi(\lambda)(\theta(H)) = \lambda(H)$ при $H \in \mathfrak{h}$, $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$. Ясно, что θ является изоморфизмом и $\langle\theta(H_1), \theta(H_2)\rangle = \langle H_1, H_2\rangle$ при $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ (в силу (2.2.5)). Предположим, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + PE_\alpha + PE_{-\alpha} + PE_\beta + PE_{-\beta} + \cdots,$$

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha \quad (H \in \mathfrak{h}), \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha \quad (\alpha \in \Delta),$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}, \text{ если } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta.$$

Так как $\varphi(\Delta) = \bar{\Delta}$, то

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{h}} + P\bar{E}_\alpha + P\bar{E}_{-\alpha} + P\bar{E}_\beta + P\bar{E}_{-\beta} + \cdots,$$

$$[\theta(H), \bar{E}_\alpha] = \alpha(H) \bar{E}_\alpha \quad (H \in \mathfrak{h}), \quad [\bar{E}_\alpha, \bar{E}_{-\alpha}] = -\theta(H_\alpha) \quad (\alpha \in \Delta),$$

$$[\bar{E}_\alpha, \bar{E}_\beta] = \bar{N}_{\alpha,\beta} \bar{E}_{\alpha+\beta}, \quad \bar{N}_{\alpha,\beta} = \bar{N}_{-\alpha,-\beta}, \text{ если } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta.$$

Пусть $\beta + i\alpha$ $(-j \leqslant i \leqslant k)$ есть α-последовательность, содержащая β. Тогда $\varphi(\beta) + i\varphi(\alpha)$ $(-j \leqslant i \leqslant k)$ будет $\varphi(\alpha)$-последовательностью, содержащей $\varphi(\beta)$. Следовательно,

$$N_{\alpha,\beta}N_{-\alpha,-\beta} = \overline{N}_{\alpha,\beta}\overline{N}_{-\alpha,-\beta} = \frac{1}{2}(j+1)k\langle\alpha,\alpha\rangle,$$

и, значит, $N_{\alpha,\beta} = \pm\overline{N}_{\alpha,\beta}$.

С помощью индукции, основанной на рассмотрении множеств Δ_γ, как в доказательстве теоремы (2.6.5), мы докажем сейчас, что, заменяя некоторые из элементов E_α, $E_{-\alpha}$ на $-E_\alpha$, $-E_{-\alpha}$, можно добиться равенства $N_{\alpha,\beta} = \overline{N}_{\alpha,\beta}$. Предположим, что $N_{\alpha,\beta} = \overline{N}_{\alpha,\beta}$, когда $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ принадлежат Δ_γ. В случае, если $\alpha + \beta = \gamma$ и $N_{\alpha,\beta} = -\overline{N}_{\alpha,\beta}$, положим $E'_\gamma = -E_\gamma$, $E'_{-\gamma} = -E_{-\gamma}$ и получим, что $[E_\alpha, E_\beta] = -N_{\alpha,\beta}E'_\gamma$ и $[E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = -N_{\alpha,\beta}E'_{-\gamma}$. Поэтому мы можем считать, что $N_{\alpha,\beta} = \overline{N}_{\alpha,\beta}$. Если $\{\alpha', \beta'\}$ — другая пара, для которой $\alpha' + \beta' = \gamma$, то, используя (2.6.3), 2), можно показать, что $N_{\alpha',\beta'} = \overline{N}_{\alpha',\beta'}$, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве предложения (2.6.5).

Итак, мы можем предполагать, что $N_{\alpha,\beta} = \overline{N}_{\alpha,\beta}$. Тогда отображение $H \to \theta(H)$ $(H \in \mathfrak{h})$ и $E_\alpha \to \overline{E}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ определяет изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на $\overline{\mathfrak{g}}$. □

(2.6.7) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$ и $\Delta \subset \mathfrak{h}_0^*$ — корневая система. Пусть, далее, φ — линейное преобразование в $\mathfrak{h}_0^*$, такое что $\varphi(\Delta) = \Delta$. Тогда преобразование θ из $\mathfrak{gl}(h)$, определенное формулой*

$$\varphi(\lambda)(\theta(H)) = \lambda(H), \quad H \in \mathfrak{h},\ \lambda \in \mathfrak{h}_0^*,$$

может быть продолжено до автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$.

Это прямо следует из доказательства теоремы (2.6.6).

Упражнение. Доказать, что в алгебре $\mathfrak{g}$ существует базис, относительно которого все структурные константы рациональны.

[*Набросок доказательства.* Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система корней. Выбирая подходящие E_α из $\mathfrak{g}(\alpha)$, получаем искомый базис $H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_l}, E_\alpha, E_{-\alpha}, \ldots$ (используем индукцию, как в (2.6.5) и (2.6.6)).]

2.7. Классические простые алгебры Ли

На протяжении этого параграфа мы будем предполагать, что поле P алгебраически замкнуто и $\operatorname{char} P = 0$. Согласно §§ 2.5 и 2.6, классификация простых алгебр Ли над P будет завершена,

если мы сможем для каждой из диаграмм Дынкина, перечисленных в (2.5.5), построить обладающую ею простую алгебру Ли. Такие алгебры были известны уже с конца прошлого столетия; позднее Хариш-Чандра нашел систематический способ их построения. (Подробности можно найти в книге [Джекобсон], гл. VII.) Здесь мы оставляем в стороне «исключительные алгебры Ли» и изучаем лишь «классические», отвечающие диаграммам A_l, B_l, C_l и D_l.

Обозначим через E_{ij} матрицу, у которой на (i, j)-м месте стоит 1, а на остальных 0. Далее, пусть 1_n обозначает единичную матрицу из $\mathfrak{gl}(n, P)$.

(A) *Специальная линейная алгебра Ли* $\mathfrak{sl}(l+1, P)$ $(l \geqslant 1)$. Перечислим основные из полученных нами результатов об этой алгебре.

Эта алгебра действует неприводимо на P^{l+1}, проста и имеет размерность $(l+1)^2 - 1 = l^2 + 2l$. Алгебра

$$\mathfrak{h} = \operatorname{sdiag}(l+1, P) = \left\{\sum_{i=1}^{l+1} x_i E_{ii} \colon x_1 + \dots + x_{l+1} = 0\right\}$$

служит ее подалгеброй Картана. Будем писать $(x_1, \dots, x_{l+1})$ вместо $\sum x_i E_{ii}$. Определим $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ формулой

$$\varepsilon_i(x_1, \dots, x_{l+1}) = x_i, \quad i = 1, \dots, l+1.$$

Тогда

$$\operatorname{ad}(x_1, \dots, x_{l+1}) E_{ij} = (x_i - x_j) E_{ij} \quad (i \neq j),$$

$$\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \colon i \neq j\},$$

$$\pi = \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \colon i = 1, \dots, l\}.$$

Элемент $(x_1, \dots, x_{l+1}) \in \mathfrak{h}$ регулярен тогда и только тогда, когда все x_i различны. Имеют место равенства

$$B(X, Y) = 2(l+1) \operatorname{tr} XY,$$

$$H_{\alpha_i} = \frac{1}{2(l+1)} (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0) \quad (1 \text{ на } i\text{-м месте}).$$

Следовательно, мы можем вычислить $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = B(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}) = 2(l+1) \operatorname{tr} H_{\alpha_i} H_{\alpha_j}$:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{l+1}, & i = j, \\ -\dfrac{1}{2(l+1)}, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \geqslant 2. \end{cases}$$

Таким образом, диаграммой Дынкина системы π является A_l.

Далее, рассмотрим представление

$$\mathfrak{gl}(n, P) \ni X \longmapsto f(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(n, P)),$$

$$f(X)Y = -{}^tXY - YX \quad (Y \in \mathfrak{gl}(n, P))$$

(см. упр. 2 и 3 § 1.2) и для $\varphi \in \mathfrak{gl}(n, P)$ положим

$$l(\varphi) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, P) \colon f(X)\varphi = 0\}.$$

Ясно, что $l(\varphi)$ есть подалгебра в $\mathfrak{gl}(n, P)$. Если элементы u, $v \in P^n$ рассматривать как векторы-столбцы, то ${}^tu\varphi v$ является билинейной формой, и, обратно, всякая билинейная форма на P^n имеет такой вид. Поэтому, полагая

$$\varphi(u, v) = {}^tu\varphi v,$$

мы получаем, что

$$l(\varphi) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, P) \colon \varphi(Xu, v) + \varphi(u, Xv) = 0\}.$$

В этих обозначениях имеем

$$l(1_n) = \mathfrak{o}(n, P),$$

$$l(J_n) = \mathfrak{sp}(n, P) \subset \mathfrak{gl}(2n, P),$$

где

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства того, что эти алгебры полупросты, нам понадобится следующее предложение:

(2.7.1) *Пусть φ — невырожденная симметричная или кососимметричная билинейная форма на P^n. Если $n \geqslant 3$, то $l(\varphi)$ действует неприводимо на P^n.*

Доказательство. Предположим, что $l(\varphi)$ оставляет инвариантным ненулевое некоторое подпространство W, и пусть $0 \neq w \in W$. Пусть, далее, $u \in (Pw)^\perp$. Так как форма φ невырожденна, то найдется элемент $v \in P^n$, для которого $\varphi(v, w) \neq 0$. Тогда линейное преобразование

$$X \colon x \longmapsto \varphi(x, u)\, v - \varphi(v, x)\, u$$

принадлежит $l(\varphi)$, поскольку

$$\begin{aligned} \varphi(Xx, y) + \varphi(x, Xy) &= \varphi(\varphi(x, u)\, v - \varphi(v, x)\, u, y) \\ &\quad + \varphi(x, \varphi(y, u)\, v - \varphi(v, y)\, u) \\ &= -\varphi(v, x)\, \varphi(u, y) + \varphi(y, u)\, \varphi(x, v) = 0, \end{aligned}$$

в силу предположения о симметричности или кососимметричности φ. Так как $Xw = -(v, w)\, u$, $\varphi(v, w) \neq 0$ и W инвариантно относительно X, то $u \in W$, т. е. $(Pw)^\perp \subset W$. Отсюда следует,

что $\dim W \geqslant n-1$. Если бы $\dim W = n-1$, то мы имели бы $W = (Pw)^{\perp}$ и $W^{\perp} = Pw$. Поскольку $\dim W = n-1 \geqslant 2$ и w — произвольный ненулевой вектор из W, это невозможно. Следовательно, $W = P^n$. $\square$

Так как $\mathfrak{o}(n, P) \cap P1_n = 0$, то, в силу (2.7.1) и (1.4.11), алгебры Ли

$$\mathfrak{o}(n, P) \quad (n \geqslant 3) \text{ и } \mathfrak{sp}(n, P) \quad (n \geqslant 2)$$

полупросты. Далее, поскольку $\mathfrak{o}(n, P)$ состоит из двух кососимметрических матриц, $\dim \mathfrak{o}(n, P) = n(n-1)/2$.

(B) *Ортогональная алгебра Ли* $\mathfrak{o}(2l+1, P)$. Для того чтобы найти подалгебру Картана в удобной форме, мы вначале приведем форму $1_{2l+1}(x, y) = \sum_{i=0}^{2l+1} x_i y_i$ к виду $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}_0\bar{y}_0 + \sum_{i=1}^{l} (\bar{x}_i\bar{y}_{l+i} + \bar{x}_{l+i}\bar{y}_i)$ с помощью линейного преобразования

$$\bar{x}_0 = x_0, \ \bar{x}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_i + \sqrt{-1}\, x_{l+i}\right),$$

$$\bar{x}_{l+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_i - \sqrt{-1}\, x_{l+i}\right) \quad (1 \leqslant i \leqslant l).$$

Другими словами, положим

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}}\,1_l & \sqrt{-\frac{1}{2}}\,1_l \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}}\,1_l & -\sqrt{-\frac{1}{2}}\,1_l \end{pmatrix};$$

ясно, что $S^{-1} = {}^tS$, т. е. S является ортогональной матрицей, и $S^{-1}\varphi S = 1_{2l+1}$. Далее, легко видеть, что

$$\mathfrak{o}(2l+1, P) = \mathfrak{l}(1_{2l+1}) = S^{-1}\mathfrak{l}(\varphi)S.$$

Так как $\mathfrak{l}(\varphi) = \{X \in \mathfrak{gl}(2l+1, P)\colon {}^tX\varphi + \varphi X = 0\}$, то

$$\mathfrak{l}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^ta & {}^tb \\ -b & A & B \\ -a & C & -{}^tA \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a, b \in P^l, \\ A, B, C \in \mathfrak{gl}(l, P), \\ {}^tB = -B, {}^tC = -{}^tC \end{array} \right\}.$$

Обозначим через $(x_1, \ldots, x_l)$ элемент алгебры $\mathfrak{l}(\varphi)$, для которого A является диагональной матрицей с диагональными элементами $x_1, \ldots, x_l$, а B, C, a, b равны 0. Пусть $\mathfrak{h}$ обозначает абелеву алгебру Ли, состоящую из всех $(x_1, \ldots, x_l)$.

Далее определим

$$\begin{array}{lll} E_{\varepsilon_i} & \text{условием} & b_i = 1, \\ E_{-\varepsilon_i} & \text{условием} & a_i = 1, \\ E_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} & \text{условием} & B = E_{ij} - E_{ji}, \\ E_{-(\varepsilon_i+\varepsilon_j)} & \text{условием} & C = E_{ij} - E_{ji} \end{array} \Bigg\} (i<j),$$

$$E_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \quad \text{условием} \quad A = E_{ij} \qquad (i \neq j)$$

(причем предполагается, что остальные элементы равны 0). Тогда $\{E_{\pm\varepsilon_i},\ E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}\ (i \neq j)\}$ является базисом в $\mathfrak{l}(\varphi)$ по модулю $\mathfrak{h}$ и

$$(*) \quad \begin{cases} \operatorname{ad}(x_1, \ldots, x_l)\, E_{\pm\varepsilon_i} = \pm x_i E_{\pm\varepsilon_i}, \\ \operatorname{ad}(x_1, \ldots, x_l)\, (E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}) = (\pm x_i \pm x_j)\, E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что нормализатор алгебры $\mathfrak{h}$ совпадает с ней самой, так что $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана. Далее, $\Delta = \{\pm\varepsilon_i,\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ (i \neq j)\}$ есть корневая система относительно $\mathfrak{h}$.

Положим

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l,\ \alpha_l = \varepsilon_l.$$

Тогда

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j \quad (i<j),$$

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = -(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_i) \quad (j<i),$$

$$\pm\varepsilon_i = \pm((\varepsilon_i - \varepsilon_l) + \varepsilon_l),$$

$$\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = \pm((\varepsilon_i - \varepsilon_l) + (\varepsilon_j - \varepsilon_l) + 2\varepsilon_l) \quad (i \neq j).$$

Следовательно, каждый корень является линейной комбинацией корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ с неотрицательными или неположительными целыми коэффициентами. Значит, $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система корней.

Далее, для любого $H = (x_1, \ldots, x_l) \in \mathfrak{h}$ имеем ввиду $(*)$:

$$B(H, H) = 2\Big(\sum_i x_i^2 + \sum_{i \neq j}((x_i + x_j)^2 + (x_i - x_j)^2)\Big)$$

$$= 2(2l-1)\sum_i x_i^2 = (2l-1)\operatorname{tr} H^2,$$

$$H_{\alpha_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(2l-1)}\ (0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0), & i<l, \\ \qquad\qquad (1 \text{ на } i\text{-м месте}) & \\ \dfrac{1}{2(2l-1)}\ (0, \ldots, 0, 1), & i = l, \end{cases}$$

и

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(2l-1)}, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2l-1}, & i < l, \\ \dfrac{1}{2(2l-1)}, & i = l. \end{cases}$$

Отсюда видно, что диаграмма Дынкина алгебры $l(\varphi)$ совпадает с B_l. Следовательно, алгебра $\mathfrak{o}(2l+1, P) \cong l(\varphi)$ проста. В силу упр. 5 § 1.5,

$$B(X, Y) = (2l-1) \operatorname{tr} XY.$$

(C) *Симплектическая алгебра Ли* $\mathfrak{sp}(l, P)$ $(l \geqslant 1)$. Имеем

$$\mathfrak{sp}(l, P) = \{X \in \mathfrak{gl}(2l, P) \colon {}^tXJ_l + J_lX = 0\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \colon A, B, C \in \mathfrak{gl}(l, P), B = {}^tB, C = {}^tC \right\}.$$

Согласно замечанию, следующему за (2.7.1), алгебра $\mathfrak{sp}(l, P)$ полупроста и неприводима для всех $l \geqslant 2$ и $\mathfrak{sp}(1, P) = \mathfrak{sl}(2, P)$. Далее,

$$\dim \mathfrak{sp}(l, P) = l^2 + 2\,\frac{(l+1)\,l}{2} = 2l^2 + l.$$

Положим

$$(x_1, \ldots, x_l) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} x_1 & & & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & x_l & & & & \\ \hdashline & & & & -x_1 & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & & -x_l \end{array}\right),$$

$$\left.\begin{aligned} E_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} + E_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (i, j = 1, \ldots, l),$$

$$E_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix} \quad (i \neq j).$$

Тогда

$$\operatorname{ad}(x_1, \ldots, x_l)\, E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j} = (\pm x_i \pm x_j)\, E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}.$$

Отсюда видно, что $\mathfrak{h} = \{(x_1, \dots, x_l)\}$ является подалгеброй Картана.

Положим $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$ и $\alpha_l = 2\varepsilon_l$.

Тогда $\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1} \quad (i < j)$,

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = -(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{i-1}) \quad (j < i),$$

$$\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = \pm((\varepsilon_i - \varepsilon_l) + (\varepsilon_j - \varepsilon_l) + 2\varepsilon_l).$$

Следовательно, $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$—фундаментальная система корней.

Для $H = (x_1, \dots, x_l)$ имеем:

$$B(H, H) = 2 \sum_{i,\ j} (x_i + x_j)^2 + 2 \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 = 2(2l+2) \sum x_i^2 = (2l+2) \operatorname{tr} H^2,$$

$$H_{\alpha_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{4(l+1)} (0, 0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0), & i < l, \\ \qquad\qquad (1 \text{ на } i\text{-м месте}) & \\ \dfrac{1}{4(l+1)} (0, \dots, 0, 2), & i = l, \end{cases}$$

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} \dfrac{-1}{4(l+1)}, & |i-j| = 1,\ i < l,\ j < l, \\ 0, & |i-j| \geqslant 2, \\ \dfrac{-1}{2(l+1)}, & i = l-1,\ j = l, \end{cases}$$

$$\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2(l+1)}, & i < l, \\ \dfrac{1}{l+1}, & i = l. \end{cases}$$

Отсюда видно, что диаграмма Дынкина для $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ совпадает с C_l и алгебра $\mathfrak{sp}(l, P)$ проста. Следовательно, также

$$B(X, Y) = (2l+2) \operatorname{tr} XY.$$

(D) *Ортогональная алгебра Ли* $\mathfrak{o}(2l, P)$ $(l \geqslant 3)$. Бóльшая часть рассуждений, относившихся к алгебре $\mathfrak{o}(2l+1, P)$, проходит и здесь. Отметим только различия. Мы полагаем

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1_l \\ 1_l & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}\, 1_l & \sqrt{-\frac{1}{2}}\, 1_l \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\, 1_l & -\sqrt{-\frac{1}{2}}\, 1_l \end{pmatrix}$$

и получаем, что $S^{-1}\varphi S = 1_{2l}$ и $S^{-1} l(\varphi) = \mathfrak{o}(2l, P)$, где $l(\varphi)$ — совокупность матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix}, \quad A, B, C \in \mathfrak{gl}(l, P),\ {}^tB + B = 0,\ {}^tC + C = 0.$$

Далее рассматриваем $l(\varphi)$. Пусть

$$(x_1, \ldots, x_l) = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & x_l & & & & \\ & & & -x_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & -x_l \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} = \{(x_1, \ldots, x_l)\}$$

и $E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}$ $(i \neq j)$ определены аналогично предыдущему. Тогда

$$\operatorname{ad}(x_1, \ldots, x_l) E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j} = (\pm x_i \pm x_j) E_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}.$$

Следовательно, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана и

$$\Delta = \{\pm\varepsilon_i \pm\varepsilon_j \colon 1 \leqslant i, j \leqslant l, i \neq j\}$$

— корневая система. Полагаем

$$\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\},$$

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l.$$

Из формул

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \begin{cases} \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1}, & i < j, \\ -(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{i-1}), & j < i, \end{cases}$$

$$\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = \pm((\varepsilon_i - \varepsilon_{l-1}) + (\varepsilon_j - \varepsilon_l) + (\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l)), \quad i < j,$$

видно, что π — фундаментальная система.

Для $H = (x_1, \ldots, x_l)$ имеем:

$$B(H, H) = \sum_{i<j} (\pm x_i \pm x_j)^2 = 2(2l-2) \sum x_i^2 = (2l-2) \operatorname{tr} H^2,$$

$$H_{\alpha_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(2l-2)} (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, -1, 0, \ldots, 0), & i < l, \\ \dfrac{1}{2(2l-2)} (0, \ldots, 0, 1, 1), & i = l, \end{cases}$$

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 0, & |i-j| \geqslant 2, \ i \neq l, \ j \neq l, \\ \dfrac{-1}{2(2l-1)}, & i = l-2, \ j = l, \\ \dfrac{-1}{2(2l-2)}, & |i-j| = 1, \ i \neq l, \ j \neq l, \\ 0, & i \neq l-2, \ i \neq l, \ j = l, \\ \dfrac{1}{2l-2}, & i = j. \end{cases}$$

При $l = 1$ эта алгебра Ли одномерна. При $l = 2$ имеем $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle = 0$, и диаграммой Дынкина является ○ ○ .

Следовательно,

$$\mathfrak{o}(4, P) \cong A_1 \oplus A_1.$$

Если $l \geqslant 3$, то π неразложима и $\mathfrak{o}(2l, P)$ — простая алгебра типа D_l. Заметим, что $D_3 = A_3$. Имеем

$$B(X, Y) = (2l - 2) \operatorname{tr} XY.$$

Размерности простых алгебр Ли представлены в следующей табличке:

Алгебра Ли	A_l	B_l	C_l	D_l	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
Размерность	$(l+1)^2 - 1$	$2l^2 + l$	$2l^2 + l$	$2l^2 - l$	14	52	78	133	248

Упражнение 1. Показать, что $\mathfrak{Sl}(2, P) \cong \mathfrak{o}(3, P) \cong \mathfrak{Sp}(1, P)$, $\mathfrak{o}(5, P) \cong \mathfrak{Sp}(2, P)$, $\mathfrak{o}(6, P) \cong \mathfrak{Sl}(3, P)$.

Упражнение 2. Разложить $\mathfrak{o}(4, P)$ в прямую сумму всех простых идеалов.

Приложение. Исключительные алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли (над P), порожденная (как линейное пространство) множеством $\{H_i, E_{\pm\lambda_i}, E_{\lambda_i - \lambda_j}: 1 \leqslant i, j \leqslant 3, i \neq j\}$, где $H_1 + H_2 + H_3 = 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, причем умножение определено следующим образом:

$$[E_{\lambda_i}, E_{\lambda_j}] = \frac{1}{\sqrt{6}} \mu(i, j, k) E_{-\lambda_k}, \qquad [E_{-\lambda_i}, E_{-\lambda_j}] = \frac{1}{\sqrt{6}} \mu(i, j, k) E_{\lambda_k},$$

$$[E_{\lambda_i}, E_{-\lambda_j}] = \frac{1}{\sqrt{8}} E_{\lambda_i - \lambda_j}, \qquad [E_{\lambda_i - \lambda_j}, E_{\lambda_j}] = \frac{1}{\sqrt{8}} E_{\lambda_i},$$

$$[E_{-\lambda_i}, E_{\lambda_i - \lambda_j}] = \frac{1}{\sqrt{8}} E_{-\lambda_j}, \qquad [E_{\lambda_i - \lambda_j}, E_{\lambda_j - \lambda_k}] = -\frac{1}{8} E_{\lambda_i - \lambda_k},$$

$$[H_i, H_{\pm\lambda_j}] = \mp \frac{1}{24} E_{\pm\lambda_j}, \qquad [H_i, E_{\pm\lambda_i}] = \pm \frac{1}{12} E_{\pm\lambda_i},$$

$$[H_i, E_{\pm(\lambda_i - \lambda_j)}] = \pm \frac{1}{8} E_{\pm(\lambda_i - \lambda_j)},$$

где i, j, k попарно различны и $\mu(i, j, k) = -1$ или 1 в зависимости от того, образует ли тройка (i, j, k) нечетную или четную перестановку тройки $(1, 2, 3)$; далее,

$$[E_{\lambda_i}, E_{-\lambda_i}] = -H_i \quad (i = 2, 3), \quad [E_{\lambda_1}, E_{-\lambda_1}] = H_1,$$

$$[E_{\lambda_i-\lambda_j}, E_{\lambda_j-\lambda_i}] = H_j - H_i \text{ для } (i, j) = (2, 3) \text{ или } (3, 1),$$

$$[E_{\lambda_2-\lambda_1}, E_{\lambda_1-\lambda_2}] = H_2 - H_1;$$

все остальные произведения равны нулю, если их значения не получаются непосредственно из приведенных выше формул.

Тогда $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли и $\mathfrak{h} = PH_1 + PH_2$ — ее подалгебра Картана. Полагая $\lambda_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\lambda_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$, $\lambda_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, получаем

$$\Delta = \{\varepsilon_p - \varepsilon_q, \pm(\varepsilon_p + \varepsilon_q - 2\varepsilon_r)\colon p, q, r = 1, 2, 3\},$$

$$\pi = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1\},$$

так что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа G_2.

Для исключительных алгебр Ли типа E и F мы лишь выпишем корневые системы и фундаментальные системы (ниже ε_1, ε_2, ..., — некоторая ортонормированная система и $\varepsilon^{(8)} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_8$):

E_6: $$\Delta = \{\varepsilon_p - \varepsilon_q, (\varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_r - \varepsilon_s - \varepsilon_t - \varepsilon_u \pm \sqrt{2}\varepsilon_7)/2, \pm\sqrt{2}\varepsilon_7\colon p, \ldots, u = 1, \ldots, 6\},$$

$$\pi = \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \alpha_6 = (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \sqrt{2}\varepsilon_7)/2\colon i = 1, \ldots, 5\};$$

E_7: $$\Delta = \{\varepsilon_p - \varepsilon_q, (\varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_r + \varepsilon_s - \varepsilon_t - \varepsilon_u - \varepsilon_v - \varepsilon_w)/2\colon p, \ldots, w = 1, \ldots, 8\},$$

$$\pi = \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \alpha_7 = (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8)/2\colon i = 1, \ldots, 6\};$$

E_8: $$\Delta = \left\{\pm\varepsilon_p \pm \varepsilon_q, \pm\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{(8)} - \varepsilon_p\right), \pm\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{(8)} - \varepsilon_p - \varepsilon_q - \varepsilon_r\right)\colon p, q, r = 1, \ldots, 8\right\},$$

$$\pi = \left\{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \alpha_8 = -\frac{1}{2}\varepsilon^{(8)} + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8\colon i = 1, \ldots, 7\right\};$$

F_4: $$\Delta = \left\{\pm\varepsilon_p, \pm\varepsilon_p \pm \varepsilon_q, \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\colon p, q = 1, \ldots, 4\right\},$$

$$\pi = \left\{\alpha_1 = \varepsilon_1, \alpha_2 = \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4), \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4\right\}.$$

Глава 3

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

3.1. Когомологии алгебр Ли

Пусть P — поле, L — алгебра Ли над P, V — векторное пространство над P и (V, f) — представление алгебры L. Будем называть *V-коцепью* размерности q алгебры L всякое q-линейное знакопеременное отображение c: $L \times \ldots \times L \to V$. Напомним, что полилинейное отображение c называется *знакопеременным* (*альтернирующим*), если $c(X_1, \ldots, X_q) = 0$, в случае когда $X_i = X_j$ для какой-нибудь пары индексов i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant q$. Заменяя X_i и X_j на $X_i + X_j$, мы видим, что c удовлетворяет условию

$$c(X_1, \ldots, \overset{i}{X_i}, \ldots, \overset{j}{X_j}, \ldots, X_q) + c(X_1, \ldots, \overset{i}{X_j}, \ldots, \overset{j}{X_i}, \ldots, X_q) = 0.$$

Пусть $C^q = C^q(L, V)$ обозначает векторное пространство всех V-коцепей размерности q, $q = 1, 2, 3, \ldots$. Кроме того, положим $C^0(L, V) = V$. Определим линейное отображение d: $C^q(L, V) \to C^{q+1}(L, V)$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ формулами

$$(1)\quad \begin{cases} dc(X) = f(X)c, \text{ если } c \in C^0(L, V), \\ dc(X_1, \ldots, X_{q+1}) = \sum\limits_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} f(X_i)\, c(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{q+1}) \\ \qquad + \sum\limits_{i<j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{q+1}), \\ \qquad\qquad \text{если } c \in C^q(L, V),\ q > 0, \end{cases}$$

где шляпка означает, что соответствующий член должен быть пропущен. Легко видеть, что $dc \in C^{q+1}(L, V)$.

Докажем, что $dd = 0$. С этой целью мы вначале введем операторы $\theta(X)$ и $\iota(X)$ для $X \in L$. Для каждого q оператор $\theta(X)$ — это эндоморфизм пространства $C^q(L, V)$, заданный формулами

$$(2)\quad \begin{cases} \theta(X)c = f(X)c, \text{ если } c \in C^0(L, V), \\ (\theta(X)c)(X_1, \ldots, X_q) = f(X)(c(X_1, \ldots, X_q)) \\ \qquad - \sum\limits_{i=1}^{q} c(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_q), \\ \qquad\qquad \text{если } c \in C^q(L, V),\ q > 0, \end{cases}$$

оператор $\iota(X)$ — это линейное отображение из $C^q(L, V)$ в $C^{q-1}(L, V)$ (мы полагаем $C^{-1}(L, V) = 0$), заданное формулами

$$(3)\quad \begin{cases} \iota(X)c = 0, \text{ если } c \in C^0(L, V), \\ (\iota(X)c)(X_1, \ldots, X_{q-1}) = c(X, X_1, \ldots, X_{q-1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } c \in C^q(L, V),\ q > 0. \end{cases}$$

Непосредственные вычисления дают:

$$(4)\quad \theta(X) = \iota(X)d + d \circ \iota(X),$$

$$(5)\quad \iota([X, Y]) = \theta(X)\iota(Y) - \iota(Y)\theta(X)$$

для любых $X, Y \in L$. Докажем следующее равенство:

$$(6)\quad \theta([X, Y]) = \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)\ (X, Y \in L).$$

С этой целью положим $S(X, Y) = \theta([X, Y]) - (\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X))$ Если $c \in C^0(L, V)$, то

$$S(X, Y)c = f([X, Y])c - (f(X)f(Y) - f(Y)f(X))c = 0.$$

Предположим, что $S(X, Y)C^{q-1}(L, V) = 0$. Для $c \in C^q(L, V)$ и $Z \in L$, применяя повторно (5), получаем

$$\iota(Z)(\theta(X)\theta(Y)c) = (\theta(X)\iota(Z) - \iota([X, Z]))\theta(Y)c$$
$$= \theta(X)(\theta(Y)\iota(Z) - \iota([Y, Z]))c - \theta(Y)(\iota[X, Z] - \iota([Y, [X, Z]))c$$
$$= \theta(X)\theta(Y)\iota(Z)c - \theta(Y)\iota([X, Z])c - \theta(X)\iota([Y, Z])c$$
$$+ \iota([Y, (X, Z]])c.$$

Так как $\iota(Z)c \in C^{q-1}(L, V)$, то

$$\iota(Z)(\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X))c$$
$$= \theta(X)\theta(Y)\iota(Z)c - \theta(Y)\theta(X)\iota(Z)c + (\iota([Y, [X, Z]])$$
$$- \iota([X, [Y, Z]]))c$$
$$= \theta([X, Y])\iota(Z)c - \iota([[X, Y], Z])c = \iota(Z)\theta([X, Y])c.$$

Следовательно, $\iota(Z)(S(X, Y)c) = 0$ для всех Z, и, значит, $S(X, Y) = 0$. Тем самым (6) доказано.

Докажем теперь индукцией по q формулу

$$(7)\quad d\theta(X) = \theta(X)d \quad (X \in L).$$

Для $c \in C^0(L, V)$ имеем

$$(\theta(X)dc)(Y) = f(X)(dc(Y) - dc([X, Y]))$$
$$= f(X)f(Y)c - f([X, Y])c = f(Y)f(X)c$$
$$= (d\theta(X)c)(Y)$$

Предположим теперь, что $d\theta(X)c = \theta(X)dc$ для $c \in C^{q-1}(L, V)$, и возьмем $c \in C^q(L, V)$. Для $Y \in L$, используя (4)—(6), получим

$$\begin{aligned}\iota(Y)(d\theta(X) - \theta(X)d)c &= (\theta(Y) - d\iota(Y))\theta(X)c \\ &+ (\iota([X, Y]) - \theta(X)\iota(Y))dc = \theta(Y)\theta(X)c \\ &+ d(\iota([X, Y]) - \theta(X)\iota(Y))c + (\theta([X, Y) \\ &- d\iota([X, Y]))c - \theta(X)(\theta(Y) - d\iota(Y))c \\ &= (\theta(X)d - d\theta(X))(\iota(Y)e) = 0.\end{aligned}$$

Поскольку Y — произвольный элемент алгебры L, мы заключаем, что $(d\theta(X) - \theta(X)d)c = 0$. Таким образом, формула (7) доказана.

Теперь будем доказывать равенство

(8) $\quad ddc = 0$ для $c \in C^q(L, V)$,

снова применяя индукцию по q. Для $c \in C^0(L, V)$ имеем

$$\begin{aligned}(ddc)(X, Y) &= f(X)(dc(Y)) - f(Y)(dc(X)) - dc([X, Y]) \\ &= f(X)(f(Y)c) - f(Y)(f(X)c) - f([X, Y])c = 0.\end{aligned}$$

Далее, допустим, что (8) выполняется для $q - 1$, и возьмем $c \in C^q(L, V)$. Для $X \in L$, в силу (4) и (7),

$$\begin{aligned}\iota(X)(ddc) &= (\theta(X) - d\iota(X))dc \\ &= d\theta(X)c - d(\theta(X) - d\iota(X))c = dd(\iota(X)c) = 0,\end{aligned}$$

и, значит, $ddc = 0$.

Назовем коцепь $z \in C^q(L, V)$ *коциклом*, если $dz = 0$. Пусть $Z^q(L, f)$ обозначает совокупность всех коциклов размерности q. Положим также $dC^{q-1}(L, V) = B^q(L, f)$ (пространство *кограниц*). Ясно, что $Z^q(L, f)$ и $B^q(L, f)$ — векторные подпространства в $C^q(L, V)$, причем $Z^q(L, f) \supset B^q(L, f)$, поскольку $dd = 0$. Факторпространство $Z^q(L, f)/B^q(L, f) = H^q(L, f)$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ называется *пространством q-мерных когомологий* алгебры L относительно представления (V, f).

Упражнение 1. $H^0(L, f) = 0$ тогда и только тогда, когда из $f(L)v = 0$ $(v \in V)$ следует, что $v = 0$. В частности, $H^0(L, \mathrm{ad}) = 0$ тогда и только тогда, когда центр $z(L)$ алгебры L равен 0.

Упражнение 2. $Z^1(L, \mathrm{ad}) = \mathrm{der}(L)$, $B^1(L, \mathrm{ad}) = \mathrm{ad}(L)$. Следовательно, алгебра L полна тогда и только тогда, когда $H^0(L, \mathrm{ad}) = H^1(L, \mathrm{ad}) = 0$.

Упражнение 3. Пусть V — одномерное векторное пространство, а f — тривиальное представление, т. е. $f = 0$. Обозначим соответствующие пространства когомологий через $H^q(L, 0)$. Тогда

$$H^0(L, 0) = P, \ \dim H^1(L, 0) = \dim(L/L^{(1)}).$$

Показать, что в этом случае можно, используя грассманово умножение в $\Sigma_q C^q (L, P)$, определить умножение в $H^* (L, 0) = \Sigma_q H^q (L, 0)$ так, что $H^* (L, 0)$ станет ассоциативной алгеброй.

3.2. Применения теории когомологий

(A) *Полная приводимость.* Пусть V — векторное пространство над полем P, L — алгебра Ли и $f: L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее представление. Предположим, что существует векторное подпространство U в V, такое что $f(L)\, U \subset U$. Подберем векторное подпространство $W \subset V$ так, чтобы $V = U \oplus W$ (прямая сумма). Тогда для любых $X \in L$, $u \in U$ и $w \in W$

$$(1)\quad \begin{cases} f(X)\, u = f_1(X)\, u, \\ f(X)\, w = g(X)\, w + f_2(X)\, w, \end{cases}$$

где $g(X)\, w \in U$ и $f_2(X)\, w \in W$, так что мы имеем линейные отображения $f_1: L \to \mathfrak{gl}(U)$, $f_2: L \to \mathfrak{gl}(W)$ и $g: L \to \mathrm{Hom}(W, U)$. Из того что f — представление, сразу следует, что

(2) f_1 и f_2 — представления,

$$(3)\quad g([X, Y]) = f_1(X)\, g(Y) - g(Y)\, f_2(X) - f_1(Y)\, g(X) + g(X)\, f_2(Y),$$

причем верно и обратное. Точнее:

(3.2.1) *Утверждения* (2) *и* (3) *справедливы тогда и только тогда, когда отображение f, определенное формулами* (1), *есть представление.*

Пусть теперь W' — произвольное подпространство в V, дополнительное к U. Тогда $W' = (1 + h)\, W$, где 1 — тождественное преобразование W и $h \in \mathrm{Hom}(W, U)$. В самом деле, если $w' \in W'$, то $w' = u + w$, где элементы $u \in U$ и $w \in W$ однозначно определяются по w'. Поскольку отображение $W' \ni w' \mapsto w \in W$ взаимно-однозначно, мы можем положить $u = h(w)$.

(3.2.2) *При $h \in \mathrm{Hom}(W, U)$ подпространство $(1 + h)\, W$ тогда и только тогда инвариантно относительно $f(L)$, когда*

(4) $h \circ f_2(X) - f_1(X) \circ h = g(X)$ *для* $X \in L$.

Доказательство. При $w \in W$ и $X \in L$ имеем $f(X)(w + hw) = g(X)\, w + f_2(X)\, w + f_1(X)\, hw$. Так как $g(X)\, w + f_1(X)\, hw \in U$ и $f_2(X)\, w \in W$, то $g(X)\, w + f_1(X)\, hw = hf_2(X)\, w$, если $f(X)(w + hw) \in W'$. Обратное очевидно. □

(3.2.3) (Упр. 2 § 1.2) *Положим*

$$F(X)\, s = f_1(X)\, s - sf_2(X) \ \text{для}\ X \in L \ \text{и}\ s \in \mathrm{Hom}(W, U).$$

Тогда (Hom (W, U), F) — *представление алгебры* L.

(3.2.4) *Отображение* g *из* Hom $(L, \text{Hom}(W, U)) = C^1(L, \text{Hom}(W, U))$ *удовлетворяет условию* (3) *тогда и только тогда, когда оно принадлежит* $Z^1(L, f)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}(dg)(X, Y) &= F(X)g(Y) - F(Y)g(X) - g([X, Y]) \\ &= f_1(X)g(Y) - g(Y)f_2(X) - f_1(Y)g(X) \\ &\quad + g(X)f_2(Y) - g([X, Y]).\end{aligned}$$

Следовательно, (3) выполняется тогда и только тогда, когда $dg = 0$. ▯

(3.2.5) *Пусть* $g \in \text{Hom}(L, \text{Hom}(W, U))$. *Для того чтобы существовало отображение* h, *удовлетворяющее равенству* (4), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $g \in B^1(L, F)$.

Доказательство. Если $h \in \text{Hom}(W, U)$, то

$$(dh)(X) = F(X)h = f_1(X)h - hf_2(X). \quad ▯$$

Итак, мы доказали следующую теорему, играющую основную роль в доказательстве полной приводимости некоторых представлений:

(3.2.6) ***Теорема***. *Пусть* (V, f) — *представление алгебры Ли* L *и* U — *подпространство в* V, *инвариантное относительно* $f(L)$. *Положим* $f_1 = f_U$ *и* $f_2 = f_{V/U}$. *Тогда формула*

$$F(X)s = f_1(X)s - sf_2(X),$$

где $X \in L$, $s \in \text{Hom}(V/U, U)$, *определяет некоторое представление алгебры* L; *если* $H^1(L, F) = 0$, *то найдется векторное подпространство* W' *в* V, *такое что* $V = U \oplus W'$ (*прямая сумма*) *и* $f(L)W' \subset W'$.

(B) *Расширения с абелевыми ядрами*. Пусть E и L — алгебры Ли над P. Предположим, что существует сюръективный гомоморфизм F: $E \to L$, ядро которого $V = F^{-1}(0)$ абелево. Линейное отображение r: $L \to E$ называется *сечением*, если $F \circ r = \text{id}$, где id — тождественное отображение (L на себя). Определим отображение $f: L \to \mathfrak{gl}(V)$, полагая для $X \in L$ и $v \in V$

$$f(X)v = [r(X), v].$$

Если r' — другое сечение, то $F(r(X) - r'(X)) = X - X = 0$, откуда $r(X) - r'(X) \in V$ и, следовательно, $[r(X), v] = [r'(X), v]$, т. е. f не зависит от выбора r.

(3.2.7) (V, f) — *представление алгебры* L.

Доказательство. Для $X, Y \in L$ и $v \in V$

$$\begin{aligned}(f(X) f(Y) - f(Y) f(X)) v \\ &= [r(X), [r(Y), v]] - [r(Y), [r(X), v]] \\ &= [[r(X), r(Y)], v].\end{aligned}$$

С другой стороны, так как $F(r([X, Y]) - [r(X), r(Y)]) = 0$, то $r([X, Y]) - [r(X), r(Y)] \in V$. Следовательно,

$$[[r(X), r(Y)], v] = [r([X, Y]), v] = f([X, Y]) v \; \square.$$

(3.2.8) *Определим отображение* g: $L \times L \to V$ *формулой*

$$g(X, Y) = [r(X), r, (Y)] - r([X, Y]).$$

Тогда $g \in Z^2(L, f)$.

Мы будем называть g *факторкоциклом*, соответствующим сечению r.

Доказательство. По определению, $g(X, X) = 0$, т. е. $g \in C^2(L, V)$. Для любых $X, Y, Z \in L$ имеем

$$\begin{aligned}dg(X, Y, Z) &= f(X) g(Y, Z) + f(Y) g(Z, X) + f(Z) g(X, \\ &Y) - g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) - g([Z, X], Y) \\ &= [r(X), [r(Y), r(Z)]] - [r(X), r([Y, Z]) \\ &+ [r(Y), [r(Z), r(X)]] - [r(Y), r([Z, X])] \\ &+ [r(Z), [r(X), r(Y)]] - [r(Z), r([X, Y])] \\ &- [r([X, Y]), r(Z)] + r([X, Y] Z]) - [r([Y, Z])' \\ &r(X)] r + ([[Y, Z], X]) - [r([Z, X]), \\ &r(Y)] + r([[Z X], Y]) = 0. \; \square\end{aligned}$$

(3.2.9) *Пусть* r_1 и r_2 — *сечения, а* g_1 и g_2 — *соответствующие факторкоциклы. Тогда* $g_1 - g_2 \in B^2(L, f)$.

Доказательство. Положим $h(X) = r_1(X) - r_2(X)$ для $X \in L$. Тогда $h \in C^1(L, V)$. Для $X, Y \in L$ имеем

$$\begin{aligned}g_1(X, Y) &= [r_1(X), r_1(Y)] - r_1([X, Y]) = [r_2(X) + h(X), \\ &r_2(Y) + h(Y)] - r_2([X, Y]) - h([X, Y]) \\ &= ([r_2(X), r_2(Y)] - r_2([X, Y])) + ([h(X), r_2(Y)] \\ &+ [r_2(X), h(Y)] - h([X, Y])) \\ &= g_2(X, Y) + dh(X, Y). \; \square.\end{aligned}$$

Определение. Пусть V — векторное пространство, L — алгебра Ли над полем P, и пусть задано представление (V, f) алгебры L. Будем называть *расширением* (алгебры L), *принадлежащим* $\{L\ (V, f)\}$, всякую пару (E, F), такую, что

1) E — алгебра Ли над P;

2) $F : E \to L$ — эпиморфизм;

3) $F^{-1}(0) = V$ — абелев идеал в E;

4) для любого сечения r функция f, определенная равенством $f(X)\, v = [r(X), v]$ для $X \in L$ и $v \in V$, совпадает с данным представлением.

Два расширения (E_1, F_1) и (E_2, F_2) называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм θ алгебры E_1 на E_2, что
$\theta v = v$ при $v \in V$ и $F_2 \cdot \theta = F_1$.

Обозначим через $|L, V, f|$ множество всех классов эквивалентности расширений, принадлежащих $\{L, (V, f)\}$.

(3.2.10) *Для любого $g \in Z^2(L, f)$ существует пара (E, F), такая что g является факторкоциклом, соответствующим некоторому сечению.*

Доказательство. В прямой сумме $E = L \oplus V$ определим умножение формулой

$$[(X_1, v_1), (X_2, v_2)] = ([X_1, X_2], f(X_1)\, v_2 - f(X_2\, v_1 + g(X_1, X_2)).$$

Тогда E становится алгеброй Ли, а V — абелевым идеалом в E. Отображение $F : (X, v) \to X$ является гомоморфизмом E на L. Определим сечение r, полагая $r(X) = (X, 0)$. Тогда $[r(X), r(Y)] = ([X, Y], g(X, Y)) = r([X, Y]) + g(X, Y)$. □

Используя полученные выше результаты, докажем следующую важную теорему;

(3.2.11) ***Теорема.*** *Существует взаимно-однозначное соответствие между $|L, V, f|$ и $H^2(L, f)$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент из $|L, V, f|$, выберем в этом классе эквивалентности какого-нибудь представителя и зададимся некоторым сечением r. Согласно (3.2.8), этому сечению r отвечает определенный факторкоцикл g. Если расширения (E_1, F_1) и (E_2, F_2) эквивалентны, r_1 и r_2 — сечения и g_1, g_2 — соответствующие коциклы, то, как нетрудно проверить, модифицируя доказательство (3.2.9), $g_1 - g_2 \in B^2(L, f)$. Таким образом, построенное отображение из $\{L, V, f\}$ в $H^2(L, f)$ определено корректно. В силу (3.2.10), оно сюръективно.

Покажем, что это отображение взаимно-однозначно. Пусть коциклы g_i соответствуют сечениям r_i расширений (E_i, F_i), $i = 1, 2$, и $g_1 - g_2 \in B^2(V, f)$. Мы хотим доказать, что расширения

(E_1, F_1) и (E_2, F_2) эквивалентны. Предположим, что $g_1 - g_2 = dh$, где $h \in C^1(L, V) = \operatorname{Hom}(L, V)$.

Заметим, что $E_i = r_i(L) \oplus V$ (прямая сумма векторных пространств) для $i = 1, 2$. Определим $\theta : E_1 \to E_2$ равенством

$$(5)\ \theta(r_1(X) + v) = r_2(X) + (h(X) + v) \text{ для } X \in L, v \in V.$$

Ясно, что отображение θ линейно и $\theta = \mathrm{id}$ на V. Если $r_2(X) + (h(X) + v) = 0$, то $X = 0$ и $v = 0$, так что θ взаимно-однозначно. Из (5) следует также, что $F_1(r_1(X) + v) = F_2\theta(r_1(X) + v) = X$. Поэтому достаточно доказать, что θ — гомоморфизм алгебр Ли.

Для любых $X, Y \in L$ и $u, v \in V$ имеем

$$\theta([r_1(X) + u, r_1(Y) + v]) = \theta([r_1(X), r_1(Y)] + f(X)v - f(Y)u) = \theta(g_1(X, Y) + r_1([X, Y]) + f(X)v - f(Y)u) = r_2([X, Y]) + (h([X, Y]) + g_1(X, Y) + f(X)v - f(Y)u) = [r_2(X), r_2(Y)] - g_2(X, Y) + h([X, Y]) + g_1(X, Y) + f(X)v - f(Y)u$$

(последнее равенство следует из (5)). С другой стороны,

$$g_1(X, Y) - g_2(X, Y) = dh(X, Y) = f(X)h(Y) - f(Y)h(X) - h([X, Y]).$$

Следовательно,

$$\theta([r_1(X) + u, r_1(Y) + v]) = [r_2(X), r_2(Y)] + f(X)h(Y) - f(Y)h(X) + f(X)v - f(Y)u = [r_2(X)\ r_2(Y)] + f(X)(h(Y) + v) - f(Y)(h(X) + u) = [r_2(X) + h(X) + u, r_2(Y) + h(Y) + v] = [\theta(r_1(X) + u), \theta(r_1(Y) + v)]. \ \square$$

Определение. Расширение называется *расщепимым*, если отвечающий ему факторкоцикл является кограницей. Для всякого расщепимого расширения мы можем взять $g = 0$, т. е. выбрать сечение r, являющееся изоморфизмом алгебр Ли [1].

(3.2.12) $H^2(L, f) = 0$ *тогда и только тогда, когда все расширения, принадлежащие* $\{L, (V, f)\}$, *расщепимы.*

[1] Иначе говоря, в этом случае $E = r(L) \oplus V$, где $r(L)$ — подалгебра в E, изоморфная алгебре L. — *Прим. ред.*

3.3. Эндоморфизм Казимира

На протяжении этого параграфа P — произвольное поле характеристики 0, а $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над P.

Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{g}$. Положим $B_f(X, Y) = \operatorname{tr}(f(X) f(Y))$ для $X, Y \in \mathfrak{g}$. В силу (1.5.4), B_f — инвариантная билинейная форма.

(3.3.1) 1) *Если $B_f = 0$, то $f = 0$ (т. е. $f(X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$).*

2) *Если представление f точно (т. е. взаимно-однозначно), то форма B_f невырожденна.*

Доказательство. 1) Предположим вначале, что $P = \overline{P}$. Пусть V — векторное пространство над P, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, $\Lambda = \{\lambda, \mu, \ldots\}$ — совокупность всех весов представления (V, f), ассоциированных с $\mathfrak{h}$, и $V = V(\lambda) \oplus \ldots$ — разложение на весовые подпространства. Тогда для каждого $\alpha \in \Delta$

$$B_f(H_\alpha, H_\alpha) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\dim V(\lambda)) \langle \lambda, \alpha \rangle^2.$$

Поскольку $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}$, из равенства $B_f = 0$ следует, что $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $\alpha \in \Delta$. Следовательно, $\Lambda = \{0\}$ и $V = V(0)$. Поэтому $f(E_\alpha) V \subset V(\alpha) = 0$, т. е. $f(E_\alpha) = 0$ при $\alpha \in \Delta$, и $f(H_\alpha) = -[f(E_\alpha), f(E_{-\alpha})] = 0$. Так как элементы H_α $(\alpha \in \Delta)$ порождают $\mathfrak{h}$ (как векторное пространство), то $f = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай. Возьмем какое-нибудь алгебраически замкнутое поле P, содержащее поле коэффициентов пространства V, и построим алгебру Ли $\mathfrak{g}^{\tilde{P}}$ и векторное пространство $V^{\tilde{P}}$. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — базис в $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{gl}(V^{\tilde{P}}) = \mathfrak{gl}(V)^{\tilde{P}} \supset \mathfrak{gl}(V)$, то, полагая

$$\tilde{f}(x_1 E_1 + \ldots + x_n E\,) = x_1 f(E_1) + \ldots + x_n f(E_n) \quad (x_i \in \tilde{P}),$$

мы получим представление $(V^{\tilde{P}}, \tilde{f})$ алгебры $\mathfrak{g}^{\tilde{P}}$. Обозначим через $\overline{B}_f$ билинейную форму на $\mathfrak{g}^{\tilde{P}}$, соответствующую этому представлению. Ясно, что $\tilde{B}_f(X, Y) = B_f(X, Y)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Если $f \neq 0$, то $\tilde{f} \neq 0$ и $\tilde{B}_f \neq 0$. Так как $\mathfrak{g}$ порождает $\mathfrak{g}^{\tilde{P}}$, то и $B_f \neq 0$.

2) Пусть $\mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{g}\colon B_f(\mathfrak{g}, X) = 0\}$. Ясно, что это идеал в $\mathfrak{g}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_1$ — полупростая алгебра. Обозначим через f_1 ограничение представления f на $\mathfrak{g}_1$. Так как (V, f_1) — представление полупростой алгебры $\mathfrak{g}_1$ и $B_{f_1} = 0$, то, в силу 1), $f_1 = 0$. Поскольку f — точное представление, то $\mathfrak{g}_1 = 0$. □

Пусть (V, f) — точное представление алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть $E_1, \ldots, E_n$ — базис в $\mathfrak{g}$. Поскольку форма B_f невырожденна,

в $\mathfrak{g}$ можно выбрать такой базис $F_1, \ldots, F_n$, что $B_f(E_i, F_j) = \delta_{ij}$. Положим

$$C = \sum_{i=1}^{n} f(E_i) f(F_i) \in \mathfrak{gl}(V).$$

Эндоморфизм C называется *эндоморфизмом Казимира* представления (V, f).

(3.3.2) 1) *C не зависит от выбора базиса.*

2) *$Cf(X) = f(X)C$ для всех $X \in \mathfrak{g}$.*

3) *Эндоморфизм C отличен от нуля и, если представление (V, f) неприводимо, невырожден.*

Доказательство. 1) Пусть $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_n$ и $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$ — другие два базиса в $\mathfrak{g}$, для которых $B_f(\overline{E}_i, \overline{F}_j) = \delta_{ij}$. Пусть

$$\overline{E}_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ji} E_j, \quad \overline{F}_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ji} F_j, \quad e_{ji}, f_{ji} \in P.$$

Тогда

$$B_f\left(\overline{E}_i, \overline{F}_j\right) = \sum_{s,t} e_{si} f_{tj} B(E_s, F_t) = \sum_s e_{si} f_{sj} = \delta_{ij}.$$

Так как из равенства ${}^t(e_{ij}) \cdot (f_{ij}) = 1$ (единичная матрица) следует, что $(f_{ij}) \cdot {}^t(e_{ij}) = 1$, мы имеем

$$\sum_s e_{is} f_{js} = \delta_{ij},$$

$$\overline{C} = \sum_s f\left(\overline{E}_s\right) f\left(\overline{F}_s\right) = \sum_{i,j,s} e_{is} f_{js} f\left(E_s\right) f\left(F_i\right)$$

$$= \sum_{i,j} \left(\sum_s e_{is} f_{js}\right) f\left(E_i\right) f\left(E_j\right) = \sum_i f\left(E_i\right) f\left(F_i\right) = C.$$

2) Пусть $X \in \mathfrak{g}$, и пусть $[X, E_i] = \Sigma_j a_{ji} E_j$, $[F_i, X] = \Sigma_j b_{ji} F_j$ $(a_{ji}, b_{ji} \in P)$. Тогда

$$B_f([X, E_i], F_j) = \sum_k a_{ki} B_f(E_k, F_j) = a_{ji},$$

$$B_f(E_i, [F_j, X]) = \sum_k b_{kj} B_f(E_i, F_k) = b_{ij}.$$

Следовательно, $a_{ji} = b_{ij}$ и потому $[F_i, X] = \Sigma_j a_{ij} F_j$. Далее,

$$f(X)\,C = \sum_i f(X)\, f(E_i)\, f(F_i) = \sum_i (f([X, E_i]) + f(E_i)\, f(X))$$

$$\cdot\, f(F_i) = \sum_{i,j} a_{ji} f(E_j)\, f(F_i) + \sum_i f(E_i)\, f(X)\, f(F_i),$$

$$Cf(X) = \sum_i f(E_i)\, f(F_i)\, f(X) = \sum_i f(E_i)(f([F_i, X])$$

$$+ f(X)\, f(F_i)) = \sum_{i,j} a_{ij} f(E_i)\, f(F_j) + \sum_i f(E_i)\, f(X)\, f(F_i).$$

Следовательно, $f(X)\,C = Cf(X)$.

3) Так как $\operatorname{tr} C = \Sigma_i \operatorname{tr} f(E_i) \; f(F_i) = \Sigma_i B_f \, (E_i, F_i) = n$, то $C \neq 0$.

Поскольку $f(X)\, CV = Cf(X)\, V \subset CV$ при $X \in \mathfrak{g}$, подпространство CV инвариантно относительно $f(\mathfrak{g})$. Так как $C \neq 0$, то $CV \neq 0$. Из неприводимости представления следует, что $CV = V$, т. е. что эндоморфизм C невырожден. □

3.4. Когомологии нетривиальных неприводимых представлений

Мы по-прежнему предполагаем, что $\operatorname{char} P = 0$ и алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста.

(3.4.1) *Пусть* (V, f) — *представление алгебры* $\mathfrak{g}$, $K \in \mathfrak{gl}(V)$ *и* $c \in C^k(\mathfrak{g}, V)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. *Тогда*

1) $Kc \in C^k(\mathfrak{g}, V)$;

2) $$((dK - Kd)\, c)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (f(X_i)\, K - Kf(X_i))\, c(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1});$$

3) *если* $Kf(X) = f(X)\, K$ *для всех* $X \in \mathfrak{g}$, *то* $d \circ K = K \circ d$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Утверждение 2) тривиально для $k \neq 0$, а для $k \geqslant 1$

$$dC(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} f(X_i)\, c(\ldots, \widehat{X}_i, \ldots) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots),$$

$$(KdC)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} Kf(X_i)\, c(\ldots, \widehat{X}_i, \ldots) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} Kc([X_i, X_j], \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots),$$

$$(dKc))X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} f(X_i)\, Kc(\ldots, \widehat{X}_i, \ldots) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} Kc([X_i, X_j], \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots).$$

3) сразу следует из 2). □

(3.4.2) *Если представление* (V, f) *неприводимо и* $f \neq 0$, *то*

$$H^k(\mathfrak{g}, f) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}_2$ ядро представления f. Тогда[1] $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (прямая сумма идеалов) и ограничение представления f на $\mathfrak{p}_1$ точно. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ и $F_1, \ldots, F_n$ — базисы в $\mathfrak{g}_1$, двойственные друг другу относительно B_f. Тогда эндоморфизм $C = \sum_{j=1}^{n} f(E_i) f(F_i)$ невырожден. Из того, что $f(X) C = Cf(X)$ для всех $X \in \mathfrak{g}_1$ и $f(X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}_2$, следует, что $f(X) C = Cf(X)$ для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Поскольку равенство $H^0(\mathfrak{g}, f) = 0$ очевидно, предположим, что $k \geqslant 1$. Напомним, что для $c \in C^k(\mathfrak{g}, V)$

$$(\theta(Y) c)(X_1, \ldots, X_k) = f(Y) c(X_1, X_k) - \sum_i c(X_1, \ldots, [Y, X_i], \ldots, X_k),$$

$$(\iota(Y) c)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = c(Y, X_1, \ldots, X_k)$$

и что

$$\theta(Y) = d\iota(Y) + \iota(Y) d.$$

Пусть $c \in Z^k(\mathfrak{g}, f)$. Положим

$$h = \sum_i f(E_i) \iota(F_i) c \in C^{k-1}(\mathfrak{g}, V).$$

Тогда

$$dh = \sum_i (df(E_i) - f(E_i) d) \iota(F_i) c + \sum_i f(E_i) d\iota(F_i) c.$$

Так как $dc = 0$, то $d\iota(F_i) c = \theta(F_i) c$. Применяя теперь (3.4.1), 2) с $K = f(E_i)$, получим

$$(dh)(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} (f(X_j) f(E_i) - f(E_i) f(X_j)) \iota(F_i) c(\ldots, \widehat{X_j}, \ldots) + \sum_{i=1}^{n} f(E_i) (f(F_i) c(X_1, \ldots, X_k) - \sum_{j=1}^{k} c(X_1, \ldots, \overset{(j)}{[F_i, X_j]}, \ldots, X_k)).$$

---

[1] Приводимое далее равенство служит определением идеала $\mathfrak{g}_1$. — *Прим. ред.*

Пусть $[X_j, E_i] = \sum_{s=1}^{n} a_{jsi} E_s$. Тогда $[F_i, X_j] = \sum_s a_{jis} F_s$, и мы имеем

$$\sum_i \sum_j (-1)^{j+1} (f X_j) f(E_i) - f(E_i) f(X_j)) \iota(F_i) c(\dots, \widehat{X}_j, \dots)$$

$$= \sum_i \sum_j (-)^{j+1} \sum_s a_{jsi} f(E_s) \iota(F_i) c(\dots, \widehat{X}_j, \dots)$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_s a_{jsi} f(E_s) (-1)^{j+1} c(F_i, X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots)$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_s a_{jsi} f(E_s) c(X_1, \dots, \overset{(j)}{F_i}, \dots),$$

$$\sum_i f(E_i) \sum_j c(X_1, \dots, \overset{(j)}{[F_i, X_j]}, \dots)$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_s a_{jis} f(E_i) c(X_1, \dots, \overset{(j)}{F_s}, \dots).$$

Следовательно,

$$(dh)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^{n} f(E_i) f(F_i) c(X_1, \dots, X_k) = Cc(X_1, \dots, X_k).$$

Согласно (3.4.1) с $K = C^{-1}$, $d(C^{-1}h) = C^{-1}dh = c$, и потому $c \in B(\mathfrak{g}, f)$. □

(3.4.3) *Для каждого представления* (V, f) алгебры $\mathfrak{g}$

$$H^1(\mathfrak{g}, f) = 0.$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что $H^1(\mathfrak{g}, f) = 0$, если $f = 0$. Пусть $c \in Z^1(\mathfrak{g}, f)$. Тогда

$$(dc)(X, Y) = f(X) c(Y) - f(Y) c(X) - c([X, Y])$$

$$= -c([X, Y]) = 0.$$

Поскольку $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, это означает, что $c = 0$, так что $H^1(\mathfrak{g}, 0) = 0$.

Применим теперь индукцию по $\dim V$. Если представление (V, f) неприводимо, то наш результат следует из (3.4.2) и только что доказанного утверждения, а если $\dim V = 1$, то всякое представление неприводимо. Предположим поэтому, что представление (V, f) приводимо и U — подпространство в V, удовлетворяющее условиям $0 \subsetneqq U \subsetneqq V$, $f(\mathfrak{g}) U \subset U$. Тогда (U, f_U) и $(V/U, f_{V/U})$, где $f_U(X) = f(X)_U$ и $f_{V/U}(X) = f(X)_{V/U}$ при $X \in \mathfrak{g}$, —

также представления алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть p — естественное отображение V на V/U. Обозначая $f_{V/U}$ через $\bar{f}$, имеем

$$p\,(f\,(X)\,v) = \bar{f}\,(X)\,pv \text{ для } X \in \mathfrak{g} \text{ и } v \in V.$$

Пусть $c \in Z^1\,(\mathfrak{g}, f)$. Тогда $pc \in C^1\,(\mathfrak{g}, V/U)$. Так как

$$(dc)(X, Y) = f\,(X)\,c\,(Y) - f\,(Y)\,c\,(X) - c\,([X, Y]) = 0,$$

то

$$\begin{aligned}(d\,(pc))(X,\ Y) &= \bar{f}\,(X)(pc)(Y) - \bar{f}\,(Y)(pc)(X) - (pc)([X, Y]) = \\ &= p\,(f\,(X)\,c\,(Y) - f\,(Y)\,c\,(X) - c\,([X,\ Y])) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $pc \in Z^1\,(\mathfrak{g}, \bar{f})$. По предположению индукции, $pc \in B^1\,(\mathfrak{g}, \bar{f})$ и, значит, существует такой вектор $\bar{v} \in V/U = C^0\,(\mathfrak{g}, V/U)$, что $\bar{f}\,(X)\,\bar{v} = (d\bar{v})\,X = (pc)(X)$ при $X \in \mathfrak{g}$. Выберем вектор $v \in V$, для которого $pv = \bar{v}$. Тогда $pf\,(X)\,v = \bar{f}\,(X)\,pv = (pc)(X)$, т. е. $h\,(X) = c\,(X) - f\,(X)\,v = (c - dv)(X) \in U$. Так как $dh = dc - ddv = 0$, то $h \in Z^1\,(\mathfrak{g}, f)$. С другой стороны, $h\,(\mathfrak{g}) \subset U$ и потому $h \in Z^1\,(\mathfrak{g}, f_U)$. Снова используя предположение индукции, заключаем, что $h \in B^1\,(\mathfrak{g}, f_U)$, т. е. $h = du$ для некоторого $u \in U$. Следовательно, $c = h + dv = d\,(u + v) \in B^1\,(\mathfrak{g}, f)$. □

Из (3.2.6) и (3.4.3) вытекает следующая теорема:

(3.4.4) *Теорема. Всякое представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо.*

3.5. Разложения Леви

Мы сохраняем предположение о том, что P имеет характеристику 0.

(3.5.1) (Э. Леви) *Пусть L — алгебра Ли и R — ее радикал. Тогда существует полупростая подалгебра S в L, такая что $L = S + R$.*

Доказательство. Предположим вначале, что R является минимальным идеалом в L. Так как $R^{(1)} = [R, R]$ — идеал в L, то $R^{(1)} = 0$, т. е. идеал R абелев. Естественный гомоморфизм $L \to L/R = \mathfrak{g}$ определяет расширение полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с абелевым ядром R. Пусть (R, f) — соответствующее представление. Поскольку R — минимальный идеал, это представление неприводимо. Если $f \neq 0$, то $H^2\,(\mathfrak{g}, f) = 0$, в силу (3.4.2), и потому, согласно (3.2.12), данное расширение расщепимо. Если $f = 0$, то $\dim R = 1$ и R совпадает с центром алгебры L. Поэтому присоединенное представление (L, ad) служит представлением алгебры $L/R = \mathfrak{g}$, откуда следует, в силу теоремы (3.4.4), что оно вполне приводимо. Таким образом, найдется идеал (= инвариант-

ное подпространство относительно ad (L)) S, для которого $L = S + R$.

Теперь будем доказывать теорему в общем случае, применяя индукцию по $\dim R$. Предположим, что R не является минимальным идеалом, и выберем какой-нибудь минимальный идеал R_0 алгебры L, содержащийся в R. Так как R/R_0 — радикал в L/R_0 и $\dim (R/R_0) < \dim R$, то по предположению индукции найдется полупростая подалгебра S_0/R_0 в L/R_0, такая что $L/R_0 = S_0/R_0 + R/R_0$, т. е. $L = S_0 + R$. Так как R_0 — радикал алгебры S_0 и $\dim R_0 < \dim R$, то, снова используя предположение индукции, можно найти полупростую подалгебру S, для которой $S_0 = S + R_0$ и, следовательно, $L = S + R$. □

(3.5.2) *Пусть L — алгебра Ли и δ — ее дифференцирование. Если δ нильпотентно (скажем, $\delta^k = 0$), то*

$$\exp \delta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i!}$$

— автоморфизм алгебр L.

Доказательство. Исходя из равенства $\delta [X, Y] = [\delta X, Y] + [X, \delta Y]$, можно с помощью индукции по m доказать формулу

$$\delta^m [X,Y] = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} [\delta^i X, \delta^{m-i} Y] = m! \sum_{i+j=m}^{\infty} \left[\frac{\delta^i}{i!} X, \frac{\delta^j}{j!} Y\right],$$

$m = 1, 2, \ldots$. Учитывая, что в нашем случае ряд конечен, получаем отсюда

$$\exp \delta \cdot [X,Y] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j=m}^{\infty} \left[\frac{\delta^i}{i!} X, \frac{\delta^j}{j!} Y\right]$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta^i}{i} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta^j}{i!} Y\right] = [\exp \delta \cdot X, \exp \delta \cdot Y]. \quad \square$$

Замечание. Мы увидим позднее, что и для произвольного дифференцирования δ ряд $\exp \delta$ (сходится и) определяет автоморфизм если $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

(3.5.3) *Пусть L — алгебра Ли и R — ее радикал.*

1) (Мальцев) *Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ — полупростые подалгебры в L и $L = \mathfrak{g} + R = \bar{\mathfrak{g}} + R$. Тогда существует автоморфизм σ алгебры L, для которого $\sigma\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}$.*

2) (Гото, Хариш-Чандра) *Пусть $\mathfrak{g}$ — максимальная полупростая подалгебра в L. Тогда $L = \mathfrak{g} + R$.*

Доказательство. 1) Обозначим через R_1 радикал алгебры $L^1 = [L, L]$ и выберем цепочку идеалов

$$R_1 \underset{\neq}{\supset} R_2 \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} R_k = 0$$

в L, такую что все алгебры R_i/R_{i+1}, $i = 1, \dots, k-1$, абелевы. Для любого $X \in L$ через $f_i(X)$ обозначим преобразование, индуцированное на R_i/R_{i+1} преобразованием $\operatorname{ad} X$. Так как $L = \mathfrak{g} + R = \bar{\mathfrak{g}} + \bar{R}$, то для каждого $X \in \mathfrak{g}$ существует единственный элемент $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{g}}$, такой что $\bar{X} \equiv X \pmod{R}$, т. е. $\bar{X} - X \in R$. Далее, отображение $X \to \bar{X}$ является изоморфизмом $\mathfrak{g}$ на $\bar{\mathfrak{g}}$ (нам нужно *продолжить* его до автоморфизма алгебры L). Так как всякая полупростая подалгебра алгебры L содержится в $L^{(1)}$, то $\bar{X} - X \in R \cap L^{(1)} = R_1$ (см. (2.1.7)).

Допустим теперь, что для некоторого l $(1 \leqslant l \leqslant k)$ существует набор из l элементов $Y_1 \in R_0 = R$, $Y_2 \in R_1, \dots, Y_l \in R_{l-1}$, удовлетворяющий условиям:

(i) каждое из преобразований $\operatorname{ad} Y_i$ нильпотентно;

(ii) если $\sigma_i = \exp(\operatorname{ad} Y_i)$ и $X \in \mathfrak{g}$, то $X - \sigma_l \dots \sigma_1 X \in R_l$. Если $l = k$, то все доказано. Покажем, что если $l < k$, то существует аналогичный набор из $l + 1$ элементов. Пусть $\tau = \sigma_l \dots \sigma_1$ и $c(\tau X) = \bar{X} - \tau X$ для любого $X \in \mathfrak{g}$. Согласно (ii), $c(\tau X) \in R_l$. Поэтому, обозначая через p естественное отображение $R_l \to R_l/R_{l+1}$ и полагая $c_1(\tau X) = pc(\tau X)$, мы получим линейное отображение из $\tau\mathfrak{g}$ в R_l/R_{l+1}. Докажем, что $c_1 \in Z^1(\tau\mathfrak{g}\, f_l)$.

Так как отображение $\tau X \to \bar{X}$ алгебры $\tau\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$ является изоморфизмом, то для любых X, Y из $\mathfrak{g}$

$$\tau([X, Y]) + c(\tau [X, Y]) = [\tau X + c(\tau X),\ \tau Y + c(\tau Y)]$$

и

$$c(\tau [X, Y]) = [\tau X, c(\tau Y)] - [\tau Y, c(\tau X)] + [c(\tau X), c(\tau Y)].$$

Но $[c(\tau X), c(\tau Y)] \in [Rl, Rl] \subset R_{l+1}$, так что

$$c_1(\tau [X, Y]) = f_l(\tau X)\, c_1(\tau Y) - f_l(\tau Y)\, c_1(\tau Y).$$

Это означает, что $c_1 \in Z^1(\tau\mathfrak{g}, f)$. В силу (3.4.3), найдется элемент $Z \in R$, для которого $c_1(\tau X) = -f_l(\tau X)\, pZ$ и потому $c(\tau X) - [Z, \tau X] \in R_{l+1}$. Следовательно,

$$\bar{X} \equiv X + [Z, \tau X] \pmod{R_{l+1}}$$

для каждого $X \in \mathfrak{g}$. Согласно (2.1.7), преобразование $\operatorname{ad} Z$ нильпотентно. Кроме того, $(\operatorname{ad} Z)^m \tau X \in R_{l+1}$ при $m = 2, 3, \dots$.

В силу (3.5.2), $\sigma = \exp(\operatorname{ad} Z)$ — автоморфизм алгебры L, и для $X \in \mathfrak{g}$

$$\sigma(\tau X) = X + \operatorname{ad} Z \cdot X + \frac{1}{2}(\operatorname{ad} Z)^2 X + \ldots$$
$$\equiv X + [Z, X] \pmod{R_{l+1}}.$$

Следовательно, $\sigma(\tau X) - \overline{X} \in R_{l+1}$. Таким образом, набор $Y_1, \ldots, Y_l, Z$ также удовлетворяет условиям (i) и (ii). Тем самым наше утверждение доказано.

2) Пусть $\mathfrak{g}'$ — полупростая подалгебра в L. Тогда $L' = \mathfrak{g}' + R$ — подалгебра в L. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая подалгебра, такая что $L = \mathfrak{g} + R$. Полагая $L' \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}''$, имеем $L' = \mathfrak{g}'' + R$ и $\mathfrak{g}'' \cap R = 0$. Пусть $[L', L'] \cap R = R_1'$. Тогда найдутся элементы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k-1} \in R_1'$, для которых

$$\exp(\operatorname{ad} Y_{k-1}) \ldots \exp(\operatorname{ad} Y_1)\, \mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'.$$

Так как $R_1' \subset R_1$, то все дифференцирования $\operatorname{ad} Y_i$ нильпотентны и, значит, $\exp(\operatorname{ad} Y_i)$ — автоморфизмы алгебры L. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = \exp(\operatorname{ad} Y_{k-1}) \ldots \exp(\operatorname{ad} Y_1)\, \mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}' \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ и $L = \tilde{\mathfrak{g}} + R$. В частности, если $\mathfrak{g}'$ — максимальная полупростая алгебра, то $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}'$ и $L = \mathfrak{g}' + R$.

В качестве приложения укажем один частный случай теоремы (3.5.3).

Пусть V — векторное пространство над P. В пространстве его аффинных преобразований $\operatorname{aff}(V) = \mathfrak{gl}(V) \oplus V$ определим скобочное умножение формулой

$$[(s, a), (t, b)] = (st - ts, sb - ta),$$

где $s, t \in \mathfrak{gl}(V)$, а $a, b \in V$. (Заметим, что для $n \times n$-матриц s, t и $1 \times n$-матриц a, b имеет место равенство

$$\left[\begin{pmatrix} s & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} (s,t) & sb-ta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.)$$

Очевидно, что $\operatorname{aff}(V)$ становится при этом алгеброй Ли; она называется *полной аффинной алгеброй*. Далее, $V = 0 \oplus V$ есть абелев идеал в $\operatorname{aff}(V)$. Элемент $v_0 \in V$ называется *неподвижной точкой* для $(s, a) \in \operatorname{aff}(V)$, если $sv_0 + a = 0$.

(3.5.4) *Всякая полупростая подалгебра* $\mathfrak{g}$ *в* $\operatorname{aff}(V)$ *имеет общую неподвижную точку.*

Доказательство. Так как $\operatorname{saff}(V) = \mathfrak{sl}(V) \oplus V$ есть идеал коразмерности 1 в $\operatorname{aff}(V)$, то $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \operatorname{saff}(V)$. Кроме того, $\mathfrak{sl}(V) = \mathfrak{sl}(V) \oplus 0$ — максимальная полупростая подалгебра,

а $V = 0 \oplus V$ — радикал алгебры saff (V). В силу (3.5.3), найдется такой вектор $v_0 \in V$, что

$$\mathfrak{g} \subset \exp \operatorname{ad} v_0 \mathfrak{A}(V).$$

Так как $(\operatorname{ad} V_0)^2 = 0$, то, обозначив $\exp \operatorname{ad}(-v_0)\, \mathfrak{g}$ через $\mathfrak{g}'$, мы получим

$$\mathfrak{g} = \{s + [v_0, s]: s \in \mathfrak{g}'\} = \{(s, sv_0): s \in \mathfrak{g}'\}.$$

Следовательно, v_0 — неподвижная точка любого элемента алгебры $\mathfrak{g}$. □

Замечание. Теоретико-групповой смысл результатов этого параграфа будет разъяснен в гл. 5.

Упражнение. Доказать, что для любого представления (V, f) алгебры $\mathfrak{g}$

$$H^2(\mathfrak{g}, f) = 0.$$

Глава **4**

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ НАД $\mathbb{R}$ И $\mathbb{C}$

4.1. Алгебры Ли над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

Пусть V — векторное пространство размерности n над $\mathbb{C}$. Рассматривая V как векторное пространство над $\mathbb{R}$, мы получим векторное пространство $V_{\mathbb{R}}$ размерности $2n$ над $\mathbb{R}$. Если V является алгеброй (Ли) над $\mathbb{C}$, то $V_{\mathbb{R}}$ будет алгеброй (Ли) над $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли размерности n над $\mathbb{R}$. Тогда $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \oplus_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ является алгеброй Ли размерности n над $\mathbb{C}$ и называется *комплексификацией* алгебры $\mathfrak{g}$. Имеет место равенство $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ (прямая сумма векторных пространств над R), и для любых $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \mathfrak{g}$

$$[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = ([X_1, X_2] - [Y_1, Y_2]) + i([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2]).$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Подалгебра $\mathfrak{g}$ в $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ называется *вещественной формой* алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, если $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g} = 0$. В этом случае алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ изоморфна $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Вообще говоря, $\tilde{\mathfrak{g}}$ может иметь несколько неизоморфных вещественных форм (см. упр. 2 § 1.6). Положим $\sigma(X + iY) = X - iY$ для $X, Y \in \mathfrak{g}$ и назовем σ *сопряжением* относительно $\mathfrak{g}$. Ясно, что

$$\sigma^2 = id, \ \sigma([U, V]) = [\sigma U, \sigma V], \ \sigma(aU) = \bar{a}\sigma(U)$$

для любых $U, V \in \tilde{\mathfrak{g}}$ и $\bar{a} \in \mathbb{C}$, где $\bar{a}$ обозначает число, комплексно-сопряженное к a. Если $\mathfrak{h}$ — векторное подпространство в $\tilde{\mathfrak{g}}$, то и $\sigma\mathfrak{h}$ тоже.

Для всякой алгебры Ли L обозначим через $\mathrm{Aut}(L)$ группу всех ее автоморфизмов. В общем случае $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}) \subset \mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})$, причем $\sigma \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})$, но $\sigma \notin \mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Далее, поскольку любой автоморфизм τ алгебры $\mathfrak{g}$ единственным образом продолжается до автоморфизма $\tilde{\tau}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ по формуле $\tilde{\tau}(X + iY) = \tau(X) + i\tau(Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$, мы можем рассматривать $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ как подгруппу в $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

(4.1.1) *Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — вещественные формы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, и пусть σ_1 и σ_2 — соответствующие сопряжения. Соотношение $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ имеет место тогда и только тогда, когда $\sigma_1\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2$ (и $\sigma_2\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$), и в этом случае*

$$\mathfrak{g}_1 = (\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2) \oplus (\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{g}_2), \quad \mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2 \cap i\mathfrak{g}_1).$$

Доказательство. Заметим, что $g_2 = \{U \in \tilde{g}: \sigma_2 U = U\}$. Если $\sigma_1\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2$, то для $X \in \mathfrak{g}_2$ мы имеем $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1 X = \sigma_1\sigma_2 X$ и $\sigma_2\sigma_1(iX) = \sigma_2(-i)\sigma_1 X = i\sigma_2\sigma_1 X = i\sigma_1\sigma_2 X = \sigma_1\sigma_2(iX)$. Обратно, если $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$, то для $X \in \mathfrak{g}_2$ имеем $\sigma_2\sigma_1 X = \sigma_1\sigma_2 X = \sigma_1 X$ и потому $\sigma_1 X \in \mathfrak{g}_2$.

Далее, предположим, что $X, Y \in \mathfrak{g}_2$ и $X + iY \in \mathfrak{g}_1$. Если $\sigma_2\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1$, то $\sigma_2(X + iY) = X - iY \in \mathfrak{g}_1$ и, значит, X, $iY \in \mathfrak{g}_1$. □

(4.1.2) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли над* $\mathbb{R}$ *и* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *— ее комплексификация. Если одна из алгебр* $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ *полупроста, то все они полупросты.*

Доказательство. В силу (1.6.1) и (2.4.1), $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathfrak{g}}$ полупроста.

Всякий абелев идеал в $\tilde{\mathfrak{g}}$ является абелевым идеалом в $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$. Если a — абелев идеал в $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$, то его комплексно-линейная оболочка

$$\{a_1X_1 + \ldots + a_kX_k: a_j \in \mathbb{C},\ X_j \in a,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

будет абелевым идеалом в $\tilde{\mathfrak{g}}$. □

Пусть V — векторное пространство размерности $2n$ над $\mathbb{R}$. Под *комплексной структурой* на V мы понимаем эндоморфизм $J \in \mathfrak{gl}(V)$, для которого $J^2 = -1$. Если J — комплексная структура на V, то, полагая $(a + bi)X = aX + bJX$ для $a, b \in R$, $X \in V$, мы превращаем V в векторное пространство размерности n над $\mathbb{C}$. В случае когда V есть векторное пространство над $\mathbb{C}$, умножение на i является комплексной структурой на $V_{\mathbb{R}}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Комплексная структура J на векторном пространстве $\mathfrak{g}$ называется *комплексной структурой Ли*, если $J \circ \operatorname{ad} X = \operatorname{ad} X \circ J$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Если на $\mathfrak{g}$ задана комплексная структура Ли J, то $\mathfrak{g}$ становится алгеброй Ли над $\mathbb{C}$. В этом случае $-J$ также будет комплексной структурой Ли на $\mathfrak{g}$.

(4.1.3) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли над* $\mathbb{R}$ *с комплексной структурой Ли* J*. Обозначим через* $\mathfrak{g}_+$ *и* $\mathfrak{g}_-$ *комплексные алгебры Ли, полученные из* $\mathfrak{g}$ *введением структур* J *и* $-J$ *соответственно. Если* $\mathfrak{g}_+$ *обладает вещественной формой, то* $\mathfrak{g}_+ \cong \mathfrak{g}_-$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда каждый элемент из $\mathfrak{g}$ единственным образом записывается в виде $X + JY$, где X, $Y \in \mathfrak{g}_0$. Мы утверждаем, что отображе-

ние $\theta : \mathfrak{g}_+ \ni X + JY \longmapsto X - JY \in \mathfrak{g}_-$ отображает $\mathfrak{g}_+$ на $\mathfrak{g}_-$. Действительно,

$$\theta(i(X + JY)) = \theta(J(X + JY)) = \theta(-Y + JX)$$
$$= -Y - JX = -J(X - JY) = i\theta(X + JY),$$
$$\theta([X_1 + JY_1, X_2 + JY_2]) = \theta(([X_1, X_2] - [Y_1, Y_2]$$
$$+ J([Y_1, X_2] + [X_1, Y_2]) = [X_1, X_2] - [Y_1,$$
$$Y_2] - J([Y_1, X_2] + [X_1, Y_2]) = [X_1 - JY_1,$$
$$X_2 - JY_2] = [\theta(X_1 + JY_1), \theta(X_2 + JY_2)]. \ \square$$

4.2. Простые алгебры Ли

(4.2.1) *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли на $\mathbb{C}$. Алгебра $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ проста тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{g}$ проста.*

Доказательство. Очевидно, что если алгебра $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ проста, то тем же свойством обладает и $\mathfrak{g}$.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ проста. Согласно (4.1.2), $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ — полупростая алгебра. Пусть $\mathfrak{g}_1$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, а $\mathfrak{g}'$ — его комплексная линейная оболочка в $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{g}'$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}_2$ — такой идеал в $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, что $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Поскольку $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$, мы заключаем, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2] = 0$, откуда следует, что $\mathfrak{g}_2 = 0$. $\square$

(4.2.2) *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{g}}$ комплексификацию алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Если $\mathfrak{g}$ обладает вещественной формой, то $\tilde{\mathfrak{g}}$ есть прямая сумма двух идеалов, каждый из которых изоморфен $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть J и i обозначают комплексные структуры в $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ соответственно. Тогда

$$\mathfrak{g}^+ + \{X + iJX : X \in \mathfrak{g}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}^- = \{X - iJX : X \in \mathfrak{g}\}$$

суть идеалы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, такие что $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$. Далее, легко видеть, что отображение $\mathfrak{g} \ni X \longmapsto (X - iJX)/2 \in \bar{\mathfrak{g}}$ осуществляет изоморфизм алгебр $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$.

Обозначим через $\mathfrak{g}_-$ алгебру Ли над $\mathbb{C}$, получаемую при введении комплексной структуры Ли $-J$ на $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Согласно (4.1.3), $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_-$. С другой стороны, рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что $\mathfrak{g}_- \cong \mathfrak{g}^+$. Следовательно, $\mathfrak{g}^+ \cong \mathfrak{g}^-$. $\square$

(4.2.3) *Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Если ее комплексификация $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ не является простой, то $\mathfrak{g}$ обладает комплексной структурой Ли.*

Доказательство. Обозначим через σ сопряжение относительно $\mathfrak{g}$. Докажем прежде всего, что если $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющий условию $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ или 0. Так как $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то либо $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}$, либо $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. Если $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. С другой стороны, если $X + iY \in \mathfrak{h}$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$, то $\sigma(X + iY) = X - iY \in \mathfrak{h}$ и, значит $X, Y \in \mathfrak{h}$. Следовательно, если $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$, то $\mathfrak{h} = 0$.

Если $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ не является простой, то существует идеал $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, такой что $0 \neq \mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Поскольку $\mathfrak{k} + \sigma\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{k} \cap \sigma\mathfrak{k}$ суть σ-инвариантные идеалы в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{k} + \sigma\mathfrak{k} \neq 0$, $\mathfrak{k} \cap \sigma\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, то $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \oplus \sigma\mathfrak{k}$.

Так как $\mathfrak{g}' = \{X \in \mathfrak{g} : X + iY \in \mathfrak{k}$ для некоторого $Y \in \mathfrak{g}\}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, причем, очевидно, $\mathfrak{g}' \neq 0$, то мы имеем $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Далее, если $X + iY_1$ и $X + iY_2$ принадлежат $\mathfrak{k}$ для некоторых X, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$, то $Y_1 - Y_2 \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} = 0$ и $Y_1 = Y_2$. Следовательно, можно определить линейное отображение $J: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, такое что

$$\mathfrak{k} = \{X + iJX : X \in \mathfrak{g}\}, \quad \sigma\mathfrak{k} = \{X - iJX : X \in \mathfrak{g}\}.$$

Поскольку $[X + iJX, Y - iJY] = 0$ при $X, Y \in \mathfrak{g}$, то

$$[X, Y] + [JX, JY] = 0, \; [JX, Y] = [X, JY]$$

и

$$[X + iJX, Y + iJY] = 2([X, Y] + i[X, JY]).$$

Так как последнее выражение принадлежит $\mathfrak{k}$, то $[X, JY] = J[X, Y]$, т. е. $\operatorname{ad} X \circ J = J \circ \operatorname{ad} X$. Кроме того, из равенств $[J^2X, Y] = [JX, JY] = -[X, Y]$ следует, что $J^2 = -1$. Таким образом, J является комплексной структурой Ли на $\mathfrak{g}$. □

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над R. Мы будем различать два случая.

a) Предположим, что $\mathfrak{g}$ не обладает ни одной комплексной структурой Ли. Тогда комплексификация $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ проста, ввиду (4.2.3), и $\mathfrak{g}$ является вещественной формой некоторой простой Алгебры Ли над $\mathbb{C}$.

b) Предположим, что $\mathfrak{g}$ обладает комплексной структурой Ли. Тогда мы можем рассматривать $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли над $\mathbb{C}$, которую обозначим $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Согласно (4.2.1), эта комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ проста. Из упражнения § 2.6 следует, что каждая полупростая алгебра Ли имеет вещественную форму, поэтому, в силу предложения (4.2.2), примененного к комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, мы имеем $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, где алгебра $\mathfrak{g}_1$ изоморфна $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Следовательно, если $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — простые алгебры Ли над C, такие что $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$, то $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$.

(4.2.4) ***Теорема.*** *Простые алгебры Ли над* $\mathbb{R}$ *можно разбить на два класса:*

(i) *простые алгебры Ли над* $\mathbb{C}$,

(ii) *вещественные формы простых алгебр Ли над* $\mathbb{C}$.

Ранее мы провели классификацию простых алгебр Ли над $\mathbb{C}$. Их можно обозначить следующим образом:

$$\mathbb{C}A_l\ (l \geqslant 1),\ \mathbb{C}B_l\ (l \geqslant 2),\ \mathbb{C}C_l\ (l \geqslant 3),\ \mathbb{C}D_l\ (l \geqslant 4),\ \mathbb{C}E_6,\ \mathbb{C}E_7,$$
$$\mathbb{C}E_8,\ \mathbb{C}F_4,\ \mathbb{C}G_2.$$

Они попарно неизоморфны как алгебры Ли над $\mathbb{R}$. Таким образом, задача классификации всех простых алгебр Ли над $\mathbb{R}$ сводится к нахождению всех неизоморфных вещественных форм для каждой простой алгебры Ли над $\mathbb{C}$.

4.3. Компактные алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Под *скалярным произведением* на $\mathfrak{g}$ мы будем понимать билинейное отображение $\varpi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, такое, что $\varpi(X, Y) = \varpi(Y, X)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ и $\varpi(X, X) > 0$ при $X \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{k}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Говорят, что скалярное произведение ϖ *инвариантно относительно* $\mathfrak{k}$ (или $\mathfrak{k}$-*инвариантно*), если

$$(1) \qquad \varpi([X, Y], Z) + \varpi(Y, [X, Z]) = 0 \quad (Y, Z \in \mathfrak{g})$$

для всех $X \in \mathfrak{k}$. В случае когда скалярное произведение $\mathfrak{g}$-инвариантно, его называют просто *инвариантным*.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ называется *компактной*, если она обладает инвариантным скалярным произведением. Подалгебра $\mathfrak{k}$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется *компактно вложенной* в $\mathfrak{g}$, если на $\mathfrak{g}$ существует $\mathfrak{k}$-инвариантное скалярное произведение.

В $\mathbb{R}^n$ мы рассматриваем обычное скалярное произведение $\varpi_0((x_i), (y_i)) = \Sigma x_i y_i$. Пусть $\mathfrak{o}(n)$ обозначает ортогональную алгебру Ли над $\mathbb{R} : \mathfrak{o}(n) = \{S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : S + {}^tS = 0\}$. Тогда $S \in \mathfrak{o}(n)$ в том и только том случае, когда $\varpi_0(xS, y) + \varpi_0(x, yS) = 0$ для $x, y \in \mathbb{R}^n$. Аналогично упр. 1 § 2.1 можно показать, что каждое подмножество в $\mathfrak{o}(n)$ вполне приводимо.

Пусть ϖ — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Мы можем найти ортонормированный относительно него базис $E_1, \ldots, E_n$: $\varpi(E_i, E_j) = \delta_{ij}$. С помощью соответствия

$$\mathfrak{g} \ni \sum x_i E_i \to (x_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \varpi\left(\sum x_i E_i, \ \sum y_i E_i\right) = \varpi_0((x_i), (y_i))$$

можно отождествить $(\mathfrak{g}, \varpi)$ с (R^n, ϖ_0). При этом отождествлении условие (1) эквивалентно условию $\operatorname{ad} X \in \mathfrak{o}(n)$. Следовательно, если ϖ является $\mathfrak{k}$-инвариантным, то $\{\operatorname{ad} X : X \in \mathfrak{k}\}$ — вполне приводимое множество.

(4.3.1) *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$.*

1) *Подалгебра $\mathfrak{k}$ алгебры $\mathfrak{g}$ компактно вложена в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда существует базис $E_1, E_2, \ldots, E_n$ в $\mathfrak{g}$, для которого*

$$(f_{ij}(X)) \in \mathfrak{o}(n) \text{ при } X \in \mathfrak{k},$$

где $(\mathrm{ad}\, X)\, E_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(X)\, E_i$.

2) *Всякая подалгебра компактной алгебры Ли компактна.*

3) *Всякая подалгебра компактно вложенной подалгебры компактно вложена.*

4) *Всякая компактно вложенная подалгебра компактна.*

5) *Если алгебра Ли компактна, то она представима в виде прямой суммы своего центра и некоторого компактного полупростого идеала, и обратно.*

Доказательство. 1)—4) Эти утверждения очевидны.

5) Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная алгебра Ли. Тогда $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{g})$ вполне приводимо и $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма некоторых минимальных идеалов. Так как минимальные идеалы либо просты, либо одномерны, то $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма некоторого полупростого идеала $\mathfrak{u}$ и центра $\mathfrak{z}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{z}$. Поскольку $\mathfrak{u}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u}$ тоже компактен.

Обратно, для любой абелевой алгебры Ли $\mathfrak{z}$ всякое скалярное произведение на $\mathfrak{z}$ инвариантно. Пусть $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$ — компактные алгебры Ли с инвариантными скалярными произведениями w_1 и w_2 соответственно. Тогда алгебра $\mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$ компактна: она обладает инвариантным скалярным произведением $w_1 \oplus w_2$, определяемым формулой

$$(w_1 \oplus w_2)((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = w_1(X_1, Y_1) + w_2(X_2\ Y_2)$$

для $X_1, Y_1 \in \mathfrak{u}_1$ и $X_2, Y_2 \in \mathfrak{u}_2$. Тем самым доказано и обратное утверждение. $\square$

(4.3.2) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ и B — ее форма Киллинга. Для того чтобы алгебра $\mathfrak{g}$ была компактной, необходимо и достаточно, чтобы форма B была отрицательно-определенной (т. е. удовлетворяла условию $B(X, X) < 0$ при $X \neq 0$).*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ компактна и имеет ортонормированный базис $E_1, \ldots, E_n$ относительно инвариантного скалярного произведения. Тогда $\mathrm{ad}\, X \cdot E_j = \Sigma_i f_{ij}(X)\, E_i$, $f_{ij}(X) + f_{ji}(X) = 0$ при $X \in \mathfrak{g}$. Следовательно,

$$B(X, X) = \sum_{i, j} f_{ij}(X)\, f_{ji}(X) = -\sum_{i, j} (f_{ij}(X))^2 \leqslant 0.$$

Обратно, если B отрицательно-определенна, то $-B$ будет инвариантным скалярным произведением. $\square$

(4.3.3) *Если компактная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает комплексной структурой Ли, то она абелева.*

Доказательство. Разложим $\mathfrak{g}$ в прямую сумму полупростого идеала $\mathfrak{u}$ и центра: $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{z}$. Тогда $\mathfrak{u} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Пусть J — комплексная структура Ли на $\mathfrak{g}$. Поскольку $J\mathfrak{u} = [J\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$, то $\mathfrak{u}$ обладает комплексной структурой Ли. Докажем, что $\mathfrak{u} = 0$.

Так как $J \circ \operatorname{ad} X = \operatorname{ad} X \circ J = \operatorname{ad}(JX)$, то

$$w(J[X, Y], Z) = w([JX, Y], Z) = w(Y, Z, JX]) = w(Y,$$

$$[JZ, X]) = w([X, Y], JZ)$$

для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{u}$. Поскольку $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = \mathfrak{u}$, мы имеем $w(JX, Y) = w(X, JY)$. При отождествлении $(\mathfrak{u}, w)$ с $(\mathbb{R}^n, w_0)$ где $n = \dim \mathfrak{u}$, J представляется некоторой симметричной матрицей. Следовательно, все собственные значения J вещественны. С другой стороны, из равенства $J^2 + 1 = 0$ вытекает, что каждое собственное значение λ преобразования J удовлетворяет уравнению $\lambda^2 + 1 = 0$. Это невозможно, если $\mathfrak{u} \neq 0$. $\square$

Теперь, пользуясь методом, принадлежащим Г. Вейлю, построим компактную форму $\mathfrak{u}$ для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и $\Delta = \{\pm\alpha, \pm\beta, \ldots\}$ — корневая система относительно $\mathfrak{h}$. Тогда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{C}E_\alpha + \mathbb{C}E_{-\alpha} + \mathbb{C}E_\beta + \mathbb{C}E_{-\beta} + \cdots,$$

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha \quad \text{при } H \in \mathfrak{h},$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha, \quad B(E_\alpha, E_\alpha) = -1,$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad \text{если } \alpha, \beta, \alpha \in \beta \in \Delta,$$

где $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ и $N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,-\beta}$ есть положительное рациональное число, так что $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$..

Положим $\mathfrak{h}_r = \Sigma_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} H_\alpha$. Тогда для $H \in \mathfrak{h}_r$ и $\alpha \in \Delta$ имеем $\alpha(H) \in R$. Зафиксируем какое-нибудь лексикографическое упорядочение в Δ и положим

$$\text{(2)} \quad C_\alpha = E_\alpha + E_{-\alpha}, \; S_\alpha = i(E_\alpha - E_{-\alpha}), \; \mathfrak{u} = i\mathfrak{h}_r + \sum_{\alpha > 0} (\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha).$$

Докажем, что $\mathfrak{u}$ является компактной вещественной формой для $\mathfrak{g}$. Прежде всего, поскольку комплексно-линейная оболочка множества $i\mathfrak{h}_r$ совпадает с $\mathfrak{h}$, а комплексно-линейная оболочка множества $\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha$ равна $\mathbb{C}E_\alpha + \mathbb{C}E_{-\alpha}$, мы видим, что $\mathfrak{u}$ порождает $\mathfrak{g}$ как линейное пространство, и, очевидно, $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}$

$= \dim_{\mathbb{C}} g$. Далее, $\mathfrak{u}$ является алгеброй Ли, как видно из соотношений

$$[iH, C_\alpha] = \alpha(H) S_\alpha, \quad [iH, S_\alpha] = -\alpha(H) C_\alpha \quad (H \in \mathfrak{h}_r),$$
$$[C_\alpha, S_\alpha] = 2iH_\alpha,$$
$$\left.\begin{aligned}&[C_\alpha, C_\beta] = N_{\alpha,\beta} C_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta} C_{\alpha-\beta},\\ &[S_\alpha, S_\beta] = -N_{\alpha,\beta} C_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,-\beta} C_{\alpha-\beta},\\ &[C_\alpha, S_\beta] = N_{\alpha,\beta} S_{\alpha+\beta} - N_{\alpha,-\beta} S_{\alpha-\beta}\end{aligned}\right\} \text{ при } \alpha \neq \pm\beta.$$

Элемент $X = iH + \Sigma_{\alpha \in \Delta} x_\alpha E_\alpha$ $(H \in \mathfrak{h}, x_\alpha \in \mathbb{C})$ принадлежит тогда и только тогда, когда $\bar{x}_\alpha = x_{-\alpha}$. В силу (2.2.5), 5), имеем

(3) $$B(X, X) = -\langle H, H \rangle - \sum_{\alpha \in \Delta} |x_\alpha|^2.$$

Обозначим через B' форму Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$. Так как $\mathfrak{u}$ — вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$, то $B'(X, X) = B(X, X)$ для $X \in \mathfrak{u}$. Из (3) следует, что форма B' отрицательно-определенна и алгебра $\mathfrak{u}$ компактна.

(4.3.4) (Г. Вейль) *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли на* $\mathbb{C}$. *Тогда алгебра Ли* $\mathfrak{u}$, *определяемая формулами* (2), *является компактной вещественной формой алгебры* $\mathfrak{g}$.

Упражнение 1. Всякая компактная разрешимая алгебра Ли абелева.

Упражнение 2. Алгебра $\mathfrak{su}$ является компактной вещественной формой алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Упражнение 3. Если $\mathfrak{u}$ — компактная простая алгебра Ли, то ее комплексификация $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ проста. [*Указание*: см. (4.2.3) и (4.3.3).]

4.4. Группы автоморфизмов алгебр Ли

Пусть $S = (s_{ij})$ принадлежит $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ и M — вещественное число, такое что $M \geqslant \max_{i,j} |s_{ij}|$. Пусть, далее, $s_{ij}^{(k)}$ обозначает (i, j)-й элемент матрицы S^k, $k = 1, 2, \ldots$, где мы полагаем $S^0 = 1$ (единичная матрица). Докажем индукцией по k неравенство

(1) $$|s_{ij}^{(k)}| \leqslant (nM)^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Допустив, что $|s_{ij}^{(k)}| \leqslant (nM)^k$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, имеем

$$|s_{ij}^{(k+1)}| = \left|\sum_p s_{ip}^{(k)} s_{pj}\right| \leqslant n(nM)^k M = (nM)^{k+1},$$

чем (1) и доказано.

Из (1) следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_{ij}^{(k)}}{k!}$$

равномерно сходится на совокупности тех матриц S, для которых $\max |s_{pq}| < M$. Поэтому мы можем определить

$$\exp S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!}$$

для $S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Пусть V — векторное пространство размерности n над $\mathbb{C}$ (соотв. $\mathbb{R}$). Положим $\mathrm{GL}(V) = \{s \in \mathfrak{gl}(V): \det s \neq 0\}$. Ясно, что $GL(V)$ является открытым подмножеством пространства $\mathfrak{gl}(V)$, отождествленного с $\mathbb{C}^{n^2}$ (соотв. $\mathbb{R}^{n^2}$), и мультипликативной группой.

(4.4.1) *Для* $s \in \mathfrak{gl}(V)$ *степенной ряд*

$$\exp s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \cdots$$

сходится (равномерно на каждом компактном подмножестве в $\mathfrak{gl}(V)$*), и*

1) *если* $s_1 s_2 = s_2 s_1$, *то*
$\exp s_1 \exp s_2 = \exp(s_1 + s_2) = \exp s_2 \exp s_1$;

2) *для* $u \in \mathrm{GL}(V)$
$\exp(usu^{-1}) = u \exp u^{-1}$;

3) exp *является комплексно-(соотв. вещественно-)аналитической функцией из* $\mathfrak{gl}(V)$ в $\mathrm{GL}(V)$;

4) *для всякого* s *из* $\mathfrak{gl}(V)$ *отображение* $R \ni x \to \exp(xs)$ *есть* однопараметрическая подгруппа *в* $\mathrm{GL}(V)$, *т. е. гладкое отображение и гомоморфизм аддитивной группы* $\mathbb{R}$ *в* $\mathrm{GL}(V)$. *Обратно, всякая однопараметрическая подгруппа в* $\mathrm{GL}(V)$ *получается таким образом.*

Доказательство. Утверждение 1) доказывается аналогично классическому случаю $n = 1$. Что касается 2), то достаточно заметить, что $(usu^{-1})^k = us^k u^{-1}$ для $k = 0, 1, \ldots$. Из 1) вытекает, что $\exp s \exp(-s) = \exp 0 = 1$ и $\det(\exp s) \neq 0$. Также в силу 1),

$$\exp(xs) \exp(ys) = \exp(x + y)\, s \text{ для } x, y \in \mathbb{R},$$

откуда следует, что $x \to \exp xs$ — однопараметрическая подгруппа.

Обратно, предположим, что $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$. Для любых $x, h \in \mathbb{R}$ имеем

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}(f(h) - 1) f(x)$$

и

$$\frac{df}{dx} = f'(0) f(x).$$

Решив это дифференциальное уравнение с начальным условием $f(0) = 1$, получим

$$f(x) = \exp(xf'(0)). \ \square$$

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$ (соотв. $\mathbb{R}$) и $E_1, \ldots, E_n$ — некоторый базис в $\mathfrak{g}$, с $[E_i, E_j] = \Sigma_k c_{ijk} E_k$. Для того чтобы преобразование $\sigma \in GL(\mathfrak{g})$ было автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $[\sigma E_i, \sigma E_j] = \Sigma_k c_{ijk} \sigma E_k$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$. Полагая $\sigma E_i = \Sigma_j s_{ji} E_j$ $(i = 1, \ldots, n)$, получим

$$(2) \qquad \sum_{p, q} c_{pqk} s_{pi} s_{qj} = \sum_r c_{ijr} s_{kr} \quad (i, j, k = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ является замкнутой подгруппой в $GL(\mathfrak{g})$.

Пусть δ — дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Модифицируя доказательство (3.5.2), легко убедиться, что $\exp \delta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Обратно, если $\exp(xs)$, $x \in \mathbb{R}$, — однопараметрическая подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, то из равенства $[\exp(xs) X, \exp(xs) Y] = \exp(xs)[X, Y]$ следует, что

$$\left[\frac{1}{x}(\exp(xs) - 1) X, \exp(xs) Y\right] + \left[X, \frac{1}{x}(\exp(xs) - 1) Y\right]$$

$$= \frac{1}{x}(\exp(xs) - 1)[X, Y],$$

откуда, устремляя x к нулю, получаем, что $[sx, Y] + [X, sY] = s[X, Y]$, т. е. s есть дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, мы доказали следующий результат:

(4.4.2) *Если δ — дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$, то* $\exp(x\delta)$, $x \in \mathbb{R}$, *является однопараметрической подгруппой в* $\mathrm{Aut}(g)$, *и обратно.*

Определение. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, порожденная множеством $\{\exp \delta \colon \delta \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})\}$, называется *присоединенной группой алгебры* $\mathfrak{g}$ и обозначается $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. Автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ называется *внутренним*, если он принадлежит $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$.

4.4.3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и σ — ее автоморфизм.*

1) *Пусть B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$*

$$B(\sigma X, \sigma Y) = B(X, Y).$$

2) *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(a) \oplus \mathfrak{g}(b) \oplus \ldots$ — *разложение на обобщенные собственные подпространства преобразования* σ. *Тогда* $[\mathfrak{g}(a), \mathfrak{g}(b)] \subset \mathfrak{g}(ab)$, *откуда, в частности, следует, что* $\mathfrak{g}(1)$ — *подалгебра.*

Доказательство. 1) Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — базис в $\mathfrak{g}$, и пусть $\operatorname{ad} X \times E_j = \Sigma_i f_{ij}(X) E_i$ $(X \in g)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $\operatorname{ad}(\sigma X) \cdot \sigma E_j = \Sigma_i f_{ij}(X) \cdot \sigma E_i$ и

$$B(\sigma X, \sigma Y) = \sum_{i,\, j} f_{i,\, j}(X) f_{j,\, i}(Y) = B(X, Y).$$

2) Для $X, Y \in \mathfrak{g}$ имеем $(\sigma - ab)\ [X, Y] = [(\sigma - a) X, (\sigma - b) Y] + [aX, (\sigma - b) Y] + [(\sigma - a) X, bY]$, и индукцией по k можно доказать, что

$$(\sigma - ab)^k [X, Y] = \sum_{p+q+r=k} \frac{k}{p!\, q!\, r!} [a^q (\sigma - a)^{p+r} X,\ b^r (\sigma - b)^{p+q} Y].$$

Если $(\sigma - a)^j X = (\sigma - b)^j Y = 0$, то $(\sigma - ab)^{2j} [X, Y] = 0$. □

(4.4.4) *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли над* $\mathbb{C}$ *и* ρ — *ее автоморфизм. Допустим, что существует базис* $E_1, \ldots, E_n$ *в* $\mathfrak{g}$, *такой что*

(3) $\quad \rho E_j = p_j E_j, \quad j = 1, \ldots, n,$

где $p_1, \ldots, p_n$ — *положительные вещественные числа. Тогда формула*

(4) $\quad \rho(x) E_j = (p_j)^x E_j \ (x \in R), \ j = 1, \ldots, n,$

определяет однопараметрическую подгруппу в $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.

Если $\sigma \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ *и* $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho(r)$ *для некоторого* $r \in \mathbb{R}$, *то* $\sigma\rho(x)\sigma^{-1} = \rho(rx)$ *для всех* $x \in R$.

Доказательство. Пусть c_{ijk} — структурные константы относительно данного базиса: $[E_i, E_j] = \Sigma_k c_{ijk} E_k$. Линейное преобразование, заданное формулой (3) при $p_j \in \mathbb{C}$, является гомоморфизмом (соотв. дифференцированием) алгебры Ли тогда и только тогда, когда

$$c_{ijk}(p_i p_j - p_k) = 0 \quad (\text{соотв. } c_{ijk}(p_i + p_j - p_k) = 0),$$
$$i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Поэтому, если формула (3) с $p_j > 0$ задает автоморфизм ρ, то формула

$$\delta E_j = (\ln p_j) E_j, \ j = 1, \ldots, n,$$

задает дифференцирование δ. Следовательно, отображение $\rho(x) = \exp(x, \delta)$, определенное формулой (4), является однопараметрической подгруппой в $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

Для произвольного положительного вещественного числа M рассмотрим разложение в ряд Тейлора

$$\ln x = \ln M + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{x-M}{M}\right)^j,$$

которое сходится при $|x - M| < M$. Выберем M достаточно большим, так чтобы выполнялись неравенства $2M > p_j$ и $2M > (p_j)^r$ для всех j. Тогда, очевидно, имеем сходящиеся разложения

$$\delta = \ln M + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{\rho-M}{M}\right)^j,$$

$$r\delta = \ln M + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{\rho(r)-M}{M}\right)^j.$$

Рассматривая δ и ρ как элементы из $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, получаем

$$\sigma\delta\sigma^{-1} = \sigma \cdot \ln M \cdot \sigma^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sigma \left(\frac{\rho-M}{M}\right)^j \sigma^{-1}$$

$$= \ln M + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{\sigma\rho\sigma^{-1}-M}{M}\right)^j$$

$$= \ln M + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{\rho(r)-M}{M}\right)^j = r\delta,$$

и, значит, $\sigma\rho(x)\sigma^{-1} = \exp x \cdot (\sigma\delta\sigma^{-1}) = \exp(rx\delta) = \rho(rx)$. □

Упражнение 1. Для $s \in \mathfrak{gl}(V)$

$$\exp(\operatorname{tr} s) = \det(\exp s).$$

Упражнение 2. $\exp\colon \mathfrak{gl}(V) \to GL(V)$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля.

Упражнение 3. $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. [*Указание*: для $X \in \mathfrak{g}$ и $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ имеем $\mathrm{ad}(\sigma X) = \sigma \cdot \mathrm{ad}\, X \cdot \sigma^{-1}$.]

Упражнение 4. Пусть L — алгебра Ли над $\mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$) и M — ее подалгебра. Каждый внутренний автоморфизм алгебры M может быть продолжен до внутреннего автоморфизма алгебры L. [*Указание*: любой внутренний автоморфизм σ алгебры M можно записать в виде $\sigma = \exp(\mathrm{ad}\, X_1) \cdot \exp(\mathrm{ad}\, X_2) \ldots \cdot \exp(\mathrm{ad}\, X_k)$ с подходящими $X_1, \ldots, X_k \in M$.]

Упражнение 5. Пусть $\mathrm{hsym}\,(n) = \{S \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{C})\colon \overline{S} = {}^tS\}$ — совокупность всех эрмитовых (симметричных) матриц. Каждая матрица S из $\mathrm{hsym}\,(n)$ полупроста, и все ее собственные значения вещественны. Пусть $\mathrm{Hsym}\,(n)$ — множество всех матриц из $\mathrm{hsym}\,(n)$, у которых все собственные значения положительны. Тогда $\exp\,(\mathrm{hsym}\,(n)) \subset \mathrm{Hsym}\,(n)$. Обратно, используя тот же метод что и в доказательстве теоремы (4.4.4), можно построить голоморфное отображение $\ln$ из $\mathrm{Hsym}\,(n)$ в $\mathrm{hsym}\,(n)$, такое что $\exp\,(\ln S) = S$. Следовательно, $\mathrm{hsym}\,(n)$ и $\mathrm{Hsym}\,(n)$ биголоморфны[1] друг другу.

Аналогичные результаты имеют место для $\mathrm{sym}\,(n) = \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{hsym}\,(n)$ и $\mathrm{Sym}\,(n) = \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{Hsym}\,(n)$.

4.5. Разложения Картана. Вещественные формы полупростых алгебр Ли над $\mathbb{C}$

В этом параграфе мы используем следующие обозначения:

$\tilde{\mathfrak{g}}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$,

B — форма Киллинга алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$\mathfrak{u}$ — фиксированная компактная вещественная форма алгебр $\tilde{\mathfrak{g}}$,

τ — сопряжение в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ относительно $\mathfrak{u}$.

Так как всякий автоморфизм вещественной формы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, или, более общим образом, всякий изоморфизм между двумя ее вещественными формами, однозначно продолжается до автоморфизма всей алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, то мы условимся в дальнейшем считать такие изоморфизмы элементами группы $\mathrm{Aut}\,(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Пусть L — алгебра Ли. Автоморфизм σ алгебры L называется *инволютивным*, если $\sigma^2 = 1$. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная форма алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда сопряжение относительно $\mathfrak{g}$ является инволютивным автоморфизмом алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$.

(4.5.1) *Пусть L — алгебра Ли и b — ее форма Киллинга. Пусть σ — инволютивный автоморфизм алгебры L. Тогда*

$$L = L_+ \oplus L_-,$$

$$L_+ = (1 + \sigma)\,L = \{X \in L\colon \sigma X = X\},$$

$$L_- = (1 - \sigma)\,L = \{Y \in L\colon \sigma Y = -Y\},$$

причем

(1) $b\,(X, Y) = 0$ *при* $X \in L_+,\ Y \in L_-$,

(2) $[L_+, L_+] \subset L_+,\quad [L_+, L_-] \subset L_-,\ [L_-, L_-] \subset L_+$.

Доказательство. Для любого $Z \in L$ имеем $Z = \frac{1}{2}(Z + \sigma Z) + \frac{1}{2}(Z - \sigma Z) \in L_+ + L_-$, и очевидно, что $L_+ \cap L_- = 0$. В силу

[1] См. ведение к гл. 6. — *Прим. ред.*

(4.4.3), 1), $b(X, Y) = b(\sigma X, \sigma Y) = b(X, -Y) = -b(X, Y)$, так что $b(X, Y) = 0$. Соотношения (2) следуют из (4.4.3), 2). □

(4.5.2) *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *вещественная форма алгебры* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *и* σ — *сопряжение относительно* $\mathfrak{g}$. *Тогда найдется однопараметрическая подгруппа* $\rho(x)$ *алгебры* $\mathrm{Aut}\,(\tilde{\mathfrak{g}})$, *такая что*

(i) $\rho(4) = (\sigma\tau)^2$, *и если* $\eta \in GL(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})$ *и* $\eta\rho(4) = \rho(4)\eta$, *то* $\eta\rho(x) = \rho(x)\eta$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$;

(ii) *если ввести обозначение* $\rho(1)\,\mathfrak{u} = \mathfrak{u}'$, *то* $\sigma\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'$, *т. е.* σ *индуцирует инволютивный автоморфизм компактной вещественной формы* $\mathfrak{u}$;

(iii) $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'_+ \oplus \mathfrak{u}'_-$, где $\mathfrak{u}'_\pm = (1 \pm \sigma)\,\mathfrak{u}'$,

(iv) $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}'_+ \oplus i\mathfrak{u}'_-$;

(v) $\mathfrak{u}'_+ = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}'$ *и* $i\mathfrak{u}'_- = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}'$.

Доказательство. Положим $f(X, Y) = -B(X, \tau Y)$ при $X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Для $X = X_1 + iX_2 \neq 0$ ($X_1, X_2 \in \mathfrak{u}$) имеем: $f(X, X) = -(B(X_1, X_2) + B(X_2, X_2)) > 0$, $f(X, Y)$ линейно (над $\mathbb{C}$ зависит от X и $f(Y, X) = \overline{f(X, Y)}$, т. е. f является положительно-определенной эрмитовой формой на $\mathfrak{g}$. Здесь нам понадобится лишь тот легко проверяемый факт, что можно найти ортонормированный базис $E_1, \ldots, E_n$ относительно такой формы: $f(E_i, E_j) = \delta_{ij}$, и если $\eta \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ удовлетворяет условию $f(\eta X, Y) = f(X, \eta Y)$ для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$, то матрица, представляющая η относительно базиса $E_1, \ldots, E_n$, эрмитова.

Так как $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}\,(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})$ и для $z \in \mathbb{C}$, $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$\sigma\tau(zX) = \sigma(\bar{z}(\tau X)) = z(\sigma\tau X),$$

то $\eta = \sigma\tau \in \mathrm{Aut}\,(\tilde{\mathfrak{g}})$. Из того, что $\sigma^2 = \tau^2 = 1$, следует, что $\eta^{-1} = \tau\sigma$, а значит, ввиду (4.4.3),1),

$$f(\eta X, Y) = -B(\eta X, \tau Y) = -B(X, \eta^{-1}\tau Y) = -B(X, \tau\sigma\tau Y) = f(X, \eta Y).$$

Следовательно, преобразование η представляется эрмитовой матрицей; поэтому оно полупросто и все его собственные значения вещественны. Значит, мы можем применить (4.4.4) к η^2 и получить однопараметрическую подгруппу $\rho(x)$ в $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$, для которой $\rho(4) = \eta^2$. Далее, поскольку $\eta\eta^2\eta^{-1} = \eta^2$ и $\tau\eta^2\tau^{-1} = \eta^{-2}$, мы заключаем, снова используя (4.4.4), что

$$\eta\rho(x) = \rho(x)\eta \text{ и } \tau\rho(x)\tau^{-1} = \rho(-x) \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $\rho(x)\,\mathfrak{u}$ является компактной вещественной формой и сопряжение относительно $\rho(x)\,\mathfrak{u}$ задается формулой $\tau(x) = \rho(x)\,\tau\rho(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Из соотношений

$$\sigma\tau(x) = \sigma\rho(x)\,\tau\rho(-x) = \sigma\tau\rho(-2x) = \eta^{-1}\eta^{2}\rho(-2x) = \eta^{-1}\rho(4-2x),$$

$$\tau(x)\,\sigma = \rho(x)\,\tau\rho(-x)\,\sigma = \rho(2x)\,\tau\sigma = \rho(2x)\,\eta^{-1} = \eta^{-1}\rho(2x)$$

вытекает, что $\sigma\tau(1) = \tau(1)\,\sigma$, и, согласно (4.1.1), $\sigma\rho(1)\,\mathfrak{u} = \rho(1)\,\mathfrak{u}$.

Так как ограничение σ на $\mathfrak{u}' = \rho(1)\,\mathfrak{u}$ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}'$, то $\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'_+ \oplus \mathfrak{u}'_-$, где $\mathfrak{u}'_\pm = (1 \pm \sigma)\,\mathfrak{u}'$. Поскольку из условия $X \in \mathfrak{u}'_+$ следует, что $\sigma X = X$, т. е. $X \in \mathfrak{g}$, мы имеем $\mathfrak{u}'_+ \subset \mathfrak{u}' \cap \mathfrak{g}$. Аналогично $\mathfrak{u}'_- \subset \mathfrak{u}' \cap i\mathfrak{g}$. Следовательно, $\mathfrak{u}'_+ = \mathfrak{u}' \cap \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{u}'_- = \mathfrak{u}' \cap i\mathfrak{g}$. Далее, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}') \oplus (\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}') = \mathfrak{u}'_+ \oplus i\mathfrak{u}'_-$. □

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Разложение векторного пространства $\mathfrak{g}$ в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ называется *разложением Картана* алгебры $\mathfrak{g}$, если существует компактная вещественная форма $\mathfrak{u}'$ комплексификации $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$, такая что

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}' \quad \text{и} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}'.$$

Из (4.5.1) и (4.5.2) очевидным образом вытекает следующее утверждение:

(4.5.3) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Тогда $\mathfrak{g}$ обладает разложением Картана. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ — такое разложение, то*

1) *отображение* $\tau' : X + Y \mapsto X - Y$ $(X \in \mathfrak{k},\ Y \in \mathfrak{p})$ *является* (*инволютивным*) *автоморфимом алгебры* $\mathfrak{g}$;

2) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $]\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$;

3) *для* $X \in \mathfrak{k}$ *и* $Y \in \mathfrak{p}$

$$B(X, X) < 0 \ (X \neq 0), \quad B(Y, Y) > 0 \ (Y \neq 0), \quad B(X, Y) = 0;$$

4) $\mathfrak{k} + i\mathfrak{p}$ — *компактная вещественная форма алгебры* $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Прежде чем продолжать построение теории, рассмотрим пример $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. В качестве компактной вещественной формы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ можно взять

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : {}^t\overline{X} = -X\}.$$

В самом деле, $\mathfrak{u}'$ есть подалгебра в $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$.

Далее, $X \in \mathfrak{u}'$ тогда и только тогда, когда матрица iX эрмитова и имеет след, равный 0. Поэтому разложение

$$(*) \quad Y = \frac{1}{2}(Y - {}^t\overline{Y}) + \frac{1}{2}(Y + {}^t\overline{Y})$$

($Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$) показывает, что $\mathfrak{su}(n)$ является вещественной формой алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Собственные значения всякой кососимметричной матрицы имеют вид $\sqrt{-1}\, r$, где $r \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что если $X \in \mathfrak{sl}(n)$, то

$$B(X, X) = 2n \operatorname{tr}(XX) \leqslant 0$$

и $\mathfrak{u}'$ есть компактная алгебра Ли. Взяв в предыдущем определении $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{u}' = \mathfrak{su}(n)$, получим

$$\mathfrak{k} = \{Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) : {}^tY = -Y\},$$

$$\mathfrak{p} = \{Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) : {}^tY = Y\}.$$

Автоморфизм τ' алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, определенный в (4.5.3), 1), — это отображение $\tau'(Y) = -{}^tY$, $Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

(4.5.4) 1) *Пусть* $\mathfrak{u}_1$ *и* $\mathfrak{u}_2$ *— компактные вещественные формы алгебры* $\tilde{\mathfrak{g}}$. *Тогда существует однопараметрическая подгруппа* $\rho(x)$ *в* $\operatorname{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}})$, *такая что* $\rho(1)\,\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$.

2. *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2$ *— разложения Картана. Тогда существует автоморфизм* $\theta \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$, *такой что*

$$\theta\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2 \quad и \quad \theta\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2.$$

Доказательство. 1) Обозначим через τ_j сопряжение относительно u_j ($j = 1, 2$). Согласно (4.5.2), найдется однопараметрическая подгруппа $\rho(x)$ в $\operatorname{Aut}(\tilde{\mathfrak{g}})$, такая что

(1) $\quad \rho(1)\,\mathfrak{u}_1 = (\rho(1)\,\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{u}_2) \oplus (\rho(1)\,\mathfrak{u}_1 \cap i\mathfrak{u}_2)$,

(2) $\quad \rho(4) = (\tau_2\tau_1)^2$.

Поскольку форма Киллинга B отрицательно-определенна на любой компактной вещественной форме, она отрицательно-определенна на $\rho(1)\,\mathfrak{u}_1$ и положительно-определенна на $i\mathfrak{u}_2$, так что $\rho(1)\,\mathfrak{u}_1 \cap i\mathfrak{u}_2 = 0$. В силу (1), $\rho(1)\,\mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{u}_2$; сравнивая размерности, заключаем, что $\rho(1)\,\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$.

2) Предположим, что $\mathfrak{u}_j$ — компактная вещественная форма, для которой $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}_j$, $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}_j$, $j = 1, 2$. Пусть σ — сопряжение относительно $\mathfrak{g}$. Так как $\sigma\tau_j = \tau_j\sigma$, $j = 1, 2$, то, в силу (2), $\rho(4)\,\sigma = \sigma\rho(4)$, и, согласно (4.5.2), (i), $\rho(x)\,\sigma = \sigma\rho(x)$, т. е. $\rho(x)\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ для $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\rho(x)$ — однопараметрическая подгруппа в $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. Полагая $\rho(1) = \theta$, имеем $\theta\mathfrak{k}_1 = \theta(\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{g}) = \theta\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{u}_2 \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{k}_2$ и $\theta\mathfrak{p}_1 = \theta(\mathfrak{u}_1 \cap i\mathfrak{g}) = \theta\mathfrak{u}_1 \cap i\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_2 \cap i\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_2$. □

(4.5.5) *Для всякого инволютивного автоморфизма* σ *алгебры* $\mathfrak{u}$ *положим*

(*) $\quad \mathfrak{g}(\sigma) = (1 + \sigma)\,\mathfrak{u} + i(1 - \sigma)\,\mathfrak{u}.$

1) $\mathfrak{g}(\sigma)$ *есть вещественная форма алгебры* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *и формула* (*) *задает разложение Картана алгебры* $\mathfrak{g}(\sigma)$.

2) *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *вещественная форма алгебры* $\tilde{\mathfrak{g}}$. *Тогда найдется инволютивный автоморфизм* σ *алгебры* $\mathfrak{u}$, *такой что* $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}(\sigma)$.

3) *Пусть* σ_1 *и* σ_2 — *инволютивные автоморфизмы алгебры* $\mathfrak{u}$. *Если* $\mathfrak{g}(\sigma_1) \cong \mathfrak{g}(\sigma_2)$, *то можно найти* $\eta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$, *для которого* $\eta\sigma_1\eta^{-1} = \sigma_2$, *и обратно.*

Доказательство. 1) Используя формулу (2) из (4.5.1), легко проверить, что $\mathfrak{g}(\sigma)$ является подалгеброй. Очевидно, $\dim \mathfrak{g}(\sigma) = \dim \mathfrak{u}$ и $\mathfrak{g}(\sigma)$ порождает $\mathfrak{g}$ как линейное пространство над $\mathbb{C}$. Следовательно, $\mathfrak{g}(\sigma)$ — вещественная форма.

2) Согласно (4.5.2), можно найти $\eta \in \mathrm{Ad}(\tilde{\mathfrak{g}})$, для которого

$$\mathfrak{g} = (1 + \sigma_0)\,\eta\mathfrak{u} + i\,(1 - \sigma_0)\,\eta\mathfrak{u},$$

где σ_0 — инволютивный автоморфизм алгебры $\eta\mathfrak{u}$. Тогда $\eta^{-1}\sigma_0\eta$ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$ и

$$\eta\mathfrak{g}(\eta^{-1}\sigma_0\eta) = \eta(1 + \eta^{-1}\sigma_0\eta)\,\mathfrak{u} + i\eta(1 - \eta^{-1}\sigma_0\eta)\,\mathfrak{i}$$
$$= (1 + \sigma_0)\,\eta\mathfrak{u} + i\,(1 - \sigma_0)\,\eta\mathfrak{u} = \mathfrak{g},$$

откуда следует, что $\mathfrak{g}(\eta^{-1}\sigma_0\eta) \cong \mathfrak{g}$.

3) Пусть $f : \mathfrak{g}(\sigma_1) \to \mathfrak{g}(\sigma_2)$ — изоморфизм. Тогда

$$\mathfrak{g}(\sigma_2) = (1 + \sigma_2)\,\mathfrak{u} + i\,(1 - \sigma_2)\,\mathfrak{u} = f(1 + \sigma_1)\,\mathfrak{u} + if(1 - \sigma_1)\,\mathfrak{u}$$

есть разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}(\sigma_2)$. Согласно (4.5.4), 2), существует автоморфизм $\rho \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}(\sigma_2))$, для которого

$$f(1 + \sigma_1)\,\mathfrak{u} = \rho(1 + \sigma_2)\,\mathfrak{u}, \quad f(1 - \sigma_1)\,\mathfrak{u} = \rho(1 - \sigma_2)\,\mathfrak{u}.$$

Для любого $X \in (1 \pm \sigma_1)\,\mathfrak{u}$ имеем $\rho^{-1}fX \in (1 \pm \sigma_2)\,\mathfrak{u}$ и $\sigma_2\rho^{-1}fX$. Поэтому $f^{-1}\rho\sigma_2\rho^{-1}fX = f^{-1}\rho\,(\pm\rho^{-1}fX) = \pm X = \sigma_1 X$. Полагая $f^{-1}\rho = \eta$, получаем, что $\eta\sigma_2\eta^{-1} = \sigma_1$. В силу равенства $(1 \pm \pm\sigma_1)\,u = \eta\,(1 \pm \sigma_2)\,u$ имеем $\eta u = u$. Обратное утверждение очевидно. ▯

Отметим, что (4.5.5) дает формальное решение следующей задачи:

Задача. Найти все неизоморфные вещественные формы алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Решение. (i) Выбираем какую-нибудь компактную вещественную форму $\mathfrak{u}$. (ii) Пусть I обозначает множество всех инволютивных автоморфизмов алгебры $\mathfrak{u}$.

(iii) Определяем отношение эквивалентности $\sim$ в I, полагая $\sigma_1 \sim \sigma_2$, если существует автоморфизм $\eta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$, для которого $\eta\sigma_1\eta^{-1} = \sigma_2$.

(iv) Из каждого класса эквивалентности в $I/\sim$ выбираем по представителю σ и строим $\mathfrak{g}(\sigma)$.

Как мы видели в (4.2.4), решение задачи классификации всех простых алгебр Ли над $\mathbb{R}$ сводится к решению предыдущей задачи для каждой простой алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Классификация, даваемая ниже в гл. 8, будет получена как раз на этом пути.

Упражнение 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ — разложение векторного пространства $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств. Если отображение $X + Y \longmapsto X - Y$ $(X \in \mathfrak{k},\ Y \in \mathfrak{p})$ является автоморфизмом, а форма Киллинга отрицательно-определенна на $\mathfrak{k}$ и положительно-определенна на $\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ есть разложение Картана.

Упражнение 2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{k}$ — максимальная компактно вложенная подалгебра в $\mathfrak{g}$.

Упражнение 3. $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$ есть разложение Картана.

4.6. Сопряженность подалгебр Картана

Нам потребуется следующий результат, доказательство которого будет дано в § 6.2.

(4.6.1) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли над* $\mathbb{R}$ *(соотв.* $\mathbb{C}$*), все дифференцирования которой — внутренние. Тогда присоединенная группа* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ *совпадает со связной компонентой в* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$*, содержащей* 1, *и является замкнутым вещественно- (соотв. комплексно-) аналитическим подмногообразием в* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$*. Множество* $\{\exp(\mathrm{ad}\, X) : X \in \mathfrak{g}\}$*, содержит некоторую окрестность единицы в* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$.

(4.6.2) 1) *Ортогональная группа* $\mathrm{O}(n) = \{S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : {}^tSS = 1\}$ *компактна.*

2) *Если* $\mathfrak{u}$ *— компактная полупростая алгебра Ли, то* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$ *и* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ *компактны.*

Доказательство. 1) Очевидно, что множество $\mathrm{O}(n)$ замкнуто в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Так как для $(s_{jk}) \in \mathrm{O}(n)$ мы имеем $\sum_j (s_{jk})^2 = 1$, то $|s_{jk}| \leqslant 1$ и $\mathrm{O}(n)$ ограничено.

2) Пусть B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$. Тогда B отрицательно-определенна и, в силу (4.4.3), 1), $B(\sigma X, \sigma Y) = B(X, Y)$ для любых $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$, $X, Y \in \mathfrak{u}$. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — ортонормированный базис относительно $-B$. Тогда $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$ представляется матрицей $S \in \mathrm{O}(n)$. Поскольку множество $\mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$ замкнуто в $\mathrm{GL}(\mathfrak{u})$, то оно компактно, а значит, и множество $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ компактно, в силу (4.6.1). □

(4.6.3) *Пусть* $\mathfrak{u}$ *— компактная полупростая алгебра Ли.*

1) *Всякая максимальная абелева подалгебра является подалгеброй Картана, и обратно.*

2) *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *— подалгебры Картана в* $\mathfrak{u}$. *Тогда существует автоморфизм* $\theta \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{a})$, *такой что* $\theta\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Доказательство. Так как всякая подалгебра Картана является максимальной нильпотентной подалгеброй и всякая компактная разрешимая алгебра Ли абелева, то всякая подалгебра Картана в $\mathfrak{u}$ является максимальной абелевой подалгеброй.

Пусть $\mathfrak{a}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{u}$. Поскольку множество $\{\mathrm{ad}\, X : X \in \mathfrak{a}\}$ можно отождествить с некоторым подмножеством в $\mathrm{O}(n)$, оно вполне приводимо; поэтому найдется векторное подпространство $\mathfrak{w}$ в $\mathfrak{u}$, такое что

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{w}, \quad [\mathfrak{a}, \mathfrak{w}] \subset \mathfrak{w}.$$

Так как подалгебра $\mathfrak{a}$ абелева, то, расширяя поле коэффициентов пространства $\mathfrak{w}$ до $\mathbb{C}$, получим разложение в прямую сумму

$$\mathfrak{w}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{w}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{w}_k$$

и $\mathbb{C}$-значные линейные функционалы $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ на $\mathfrak{a}$, такие что для любого $X \in \mathfrak{a}$ подпространство $\mathfrak{w}_j$ содержится в обобщенном собственном подпространстве преобразования $\mathrm{ad}\, X$, отвечающем собственному значению $\lambda_j(X)$, $j = 1, \ldots, k$. Допустим, что $\lambda_j = 0$ для некоторого j. Тогда можно найти элемент $Y\,(\neq 0) \in \mathfrak{w}_j$, для которого $[\mathfrak{a}, Y] = 0$. Полагая $Y = Y_1 + iY_2$ $(Y_1, Y_2 \in \mathfrak{w})$, имеем $[\mathfrak{a}, Y_1] = [\mathfrak{a}, Y_2] = 0$. Следовательно, $\mathfrak{a} + \mathbb{R}Y_1$ и $\mathfrak{a} + \mathbb{R}Y_2$ — абелевы подалгебры в $\mathfrak{u}$. Поскольку $\mathfrak{a}$ — максимальная абелева подалгебра, то $Y_1 = Y_2 = 0$, — противоречие. Таким образом, мы доказали, что все λ_j отличны от 0. Поэтому в $\mathfrak{a}$ можно найти элемент X_0, для которого $\lambda_1(X_0) \neq 0, \ldots$ $\ldots, \lambda_k(X_0) \neq 0$. Следовательно, ограничение преобразования $\mathrm{ad}\, X_0$ на $\mathfrak{w}^{\mathbb{C}}$ (а значит, и на $\mathfrak{w}$) невырожденно. Итак, мы доказали, что $\mathfrak{a}$ является собственным подпространством преобразования $\mathrm{ad}\, X_0$, отвечающим собственному значению 0.

Продолжим доказательство, используя метод, принадлежащий Ханту. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — максимальные абелевы подалгебры, и пусть элементы $X_0 \in \mathfrak{a}$, $Y_0 \in \mathfrak{b}$ таковы, что $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ являются собственными подпространствами преобразований $\mathrm{ad}\, X_0$ и $\mathrm{ad}\, Y_0$ соответственно, отвечающими собственному значению 0. Обозначим через B форму Киллинга алгебры $\mathfrak{u}$. Тогда $B(\sigma X_0, Y_0)$ есть непрерывная функция от $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$. Пользуясь тем, что группа $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ компактна, выберем элемент $\sigma_0 \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, для которого $B(\sigma_0, X_0, Y_0)$ принимает максимальное значение. Пусть Z принадлежит $\mathfrak{u}$. Поскольку $\exp(x\,\mathrm{ad}\, Z)\,\sigma_0 \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ $(x \in \mathbb{R})$, функция $f(x) = B(\exp(x\,\mathrm{ad}\, Z)\,\sigma_0 X_0, Y_0)$ достигает максимума при $x = 0$. Так как $\dfrac{d}{dx}\exp(x\,\mathrm{ad}\, Z)_{x=0} = \mathrm{ad}\, Z$, то

$$\frac{df}{dx}(0) = B([z, \sigma_0 X_0], Y_0) = B([\sigma_0 X_0, Y_0], Z) = 0.$$

Ввиду произвольности Z имеем $[\sigma_0 X_0, Y_0] = 0$. Поскольку $\mathfrak{b}$ есть собственное подпространство преобразования $\operatorname{ad} Y_0$, отвечающее собственному значению 0, это равенство эквивалентно условию $\sigma_0 X_0 \in \mathfrak{b}$. Поскольку $\mathfrak{a}$ есть собственное подпространство преобразования $\operatorname{ad} X_0$, отвечающее собственному значению 0, то $\sigma_0\mathfrak{a}$ является собственным подпространством для $\operatorname{ad}(\sigma_0 X_0)$, отвечающим собственному значению 0. Поэтому из равенства $[\sigma_0 X_0, \mathfrak{b}] = 0$ следует, что $\sigma_0\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$. Аналогично равенство $[X_0, \sigma_0^{-1} Y_0] = 0$ влечет включение $\sigma_0^{-1}\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$. Следовательно, $\sigma_0\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Это завершает доказательство, так как если $\mathfrak{a}$ — подалгебра Картана и $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{u})$, то и $\sigma\mathfrak{a}$ — подалгебра Картана. □

(4.6.4) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — подалгебры Картана в $\mathfrak{g}$. Существует автоморфизм $\theta \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$, для которого $\theta\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Доказательство. Исходя из данной подалгебры Картана $\mathfrak{h}_j$ ($j = 1, 2$), можно по формулам (2) § 4.3 построить компактную вещественную форму $\mathfrak{u}_j$, такую что $\mathfrak{u}_j \cap \mathfrak{h}_j = \mathfrak{a}_j$ есть подалгебра Картана в $\mathfrak{u}_j$. Согласно (4.5.4), 1), существует автоморфизм $\eta \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$, для которого $\eta\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$. Тогда $\eta\mathfrak{a}_1$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{u}_2$. Согласно (4.6.3), найдется такой автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}_2) \subset \operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$, что $\sigma\eta\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. Полагая $\theta = \sigma\eta$, получим, что $\theta\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. Так как $\mathfrak{h}_j$ — комплексная линейная оболочка алгебры $\mathfrak{a}_j$, $j = 1, 2$, то $\theta\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. □.

Замечание. Теорема (4.6.4) справедлива для любой алгебры Ли над полем $P = \bar{P}$ характеристики 0.

Упражнение 1. Доказать (4.6.3) без предположения о полупростоте алгебры $\mathfrak{u}$. [*Указание.* Если $\mathfrak{g}$ компактна, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{u}$ — полупростой идеал и $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$. Используя этот факт, мы можем отождествить $\operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$ с $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$ и применить (4.6.1) к $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$. Либо же можно воспользоваться тем фактом, что произвольная подалгебра Картана (соотв. максимальная абелева подалгебра) алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{a} + \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{a}$ — подалгебра Картана (соотв. максимальная абелева подалгебра) в $\mathfrak{u}$.]

Упражнение 2. Подалгебры $\mathfrak{a} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathfrak{b} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ являются подалгебрами Картана в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Однако не существует автоморфизма $\theta \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, для которого $\theta\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. [*Указание*: сравните собственные значения преобразований $\operatorname{ad}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\operatorname{ad}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.]

4.7. Разложения Ивасавы

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ — ее комплексификация. В силу (4.5.2), можно найти компактную вещественную форму $\mathfrak{u}$ и инволютивный автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{u}$, такие что

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

где $\mathfrak{k} = (1 + \sigma)\,\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{p} = i\,(1 - \sigma)\,\mathfrak{u}$.

Выберем в $\mathfrak{p}$ какое-нибудь максимальное подмножество $\mathfrak{a}$, элементы которого попарно перестановочны. Ясно, что $\mathfrak{a}$ будет векторным подпространством в $\mathfrak{p}$, и, поскольку $i\mathfrak{a}$ — коммутативное подмножество в $\mathfrak{u}$, можно найти подалгебру Картана $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{u}$, для которой $i\mathfrak{a} \subset \mathfrak{t}$ (согласно (4.6.3)). Пусть X — элемент из $\mathfrak{t}$. Для любого $Y \in i\mathfrak{a}$ имеем $[X, Y] = 0$ и $[\sigma X, Y] = -[\sigma X, \sigma Y] = -\sigma\,[X, Y] = 0$, так что $[X - \sigma X, Y] = 0$. Поскольку $X - \sigma X \in (1 - \sigma)\,\mathfrak{u}$, то, ввиду максимальности $i\mathfrak{a}$ как коммутативного множества, $X - \sigma X \in i\mathfrak{a}$, откуда $\sigma X \in \mathfrak{t}$, т. е. $\mathfrak{t}$ инвариантна относительно σ. Следовательно, найдется подалгебра $\mathfrak{b}$ алгебры $\mathfrak{k}$, такая что

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{b} \oplus i\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b} \subset \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}.$$

Пусть $H_1, \ldots, H_r$ — базис в $\mathfrak{a}$ и $H_{r+1}, \ldots, H_l$ — базис в $i\mathfrak{b}$. Тогда

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}H_1 + \cdots + \mathbb{C}H_l$$

— подалгебра Картана в $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Обозначим корневую систему относительно $\mathfrak{h}$ через Δ. В силу результатов гл. 2 имеем

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{j=1}^{l} \mathbb{C}H_j + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}E_\alpha,$$

$$[H, H'] = 0 \quad \text{при} \quad H, H' \in \mathfrak{h},$$

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)\,E_\alpha, \quad \alpha(H_j) \in \mathbb{R} \quad (j = 1, \ldots, l),$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha \in i\mathfrak{t} \quad (\alpha \in \Delta),$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} \quad (\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta),$$

$$N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta} \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что поскольку $\operatorname{ad} X$ ($X \in \mathfrak{u}$) можно представить матрицей (s_{jk}), для которой $s_{jk} + s_{kj} = 0$, то все собственные значения преобразования $\operatorname{ad} X$ — чисто мнимые числа, а поскольку $H_j \in i\mathfrak{u}$, то $\operatorname{ad} H_j$ имеет лишь вещественные собственные значения при $j = 1, \ldots, l$.

Обозначим через $\mathfrak{u}'$ множество всех элементов из $\tilde{\mathfrak{g}}$ вида

$$x_1 H_1 + \cdots + x_l H_l + x_\alpha E_\alpha + x_{-\alpha} E_{-\alpha} + \cdots,$$

где $x_1, \ldots, x_l \in i\mathbb{R}$ и $\bar{x}_\alpha = x_{-\alpha}$ при $\alpha \in \Delta$. Согласно (4.3.4), $\mathfrak{u}'$ является компактной вещественной формой алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Согласно (4.5.4), существует внутренний автоморфизм θ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, для которого $\theta\mathfrak{u}' = \mathfrak{u}$. В силу (4.6.3), мы можем предположить также, что $\theta\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ и $\mathfrak{u} = \{H + \sum_\alpha x_\alpha \cdot \theta E_\alpha : H \in \mathfrak{t},\ \bar{x}_\alpha = x_{-\alpha}$ для всех $\alpha \in \Delta\}$. Следовательно, мы можем, не меняя обозначений, отождествить $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{u}'$.

Так как $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, то найдется такой эндоморфизм $f(\sigma)$ двойственного к $\mathfrak{h}$ векторного пространства $\mathfrak{h}^*$, что $f(\sigma)\,\Delta = \Delta$. Для удобства записи будем обозначать $f(\sigma)$ просто через σ. Мы знаем, что

$$(\sigma\alpha)(H) = \alpha(\sigma^{-1}H) = \alpha(\sigma H) \text{ для } \alpha \in \Delta,\quad H \in \mathfrak{h}$$

и

$$\sigma E_\alpha \in \mathbb{C}E_{\sigma\alpha}.$$

Введем лексикографическое упорядочение, отвечающее базису $H_1, \ldots, H_l$, и положим

$$\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta : \alpha(H) = 0 \text{ при } H \in \mathfrak{a}\},$$

$$\Delta_+ = \{\alpha \in \Delta : \alpha > 0 \text{ и } \sigma\alpha < 0\},$$

$$\Delta_- = \{\alpha \in \Delta : \alpha < 0 \text{ и } \sigma\alpha > 0\} = -\Delta_+.$$

(4.7.1) 1) Δ *является объединением трех попарно непересекающихся множеств* Δ_+, Δ_- *и* Δ_0.

2) $\alpha \in \Delta_0$ *тогда и только тогда, когда* $\sigma\alpha = \alpha$, *и в этом случае*

$$\sigma E_\alpha = E_\alpha, \quad \sigma E_{-\alpha} = E_{-\alpha}.$$

3) *Если* $\alpha, \beta \in \Delta_+$ *и* $\alpha + \beta \in \Delta$, *то* $\alpha + \beta \in \Delta_+$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$(\sigma\alpha)(H_j) = \begin{cases} -\alpha(H_j), & j = 1, \ldots, r, \\ \alpha(H_j), & j = r+1, \ldots, l. \end{cases}$$

1) Если $\alpha \notin \Delta_0$, то найдется номер $j \leqslant r$, для которого $\alpha(H_1) = \ldots = \alpha(H_{j-1}) = 0$ и $\alpha(H_j) \neq 0$. Следовательно, $\sigma\alpha <$ (соотв. $>$) 0, когда $\alpha >$ (соотв. $<$) 0.

2) Очевидно, что $\alpha \in \Delta_0$, т. е. $\alpha(H_1) = \ldots = \alpha(H_r) = 0$, тогда и только тогда, когда $\sigma\alpha = \alpha$. Положим

$$C_\alpha = E_\alpha - E_{-\alpha}, \quad S_\alpha = i(E_\alpha - E_{-\alpha}) \text{ при } \alpha \in \Delta.$$

Если $\alpha \in \Delta_0$, то E_α и $E_{-\alpha}$ перестановочны с любым элементом из $\mathfrak{a}$. Поскольку $\sigma E_\alpha \subset \mathbb{C}E_{\sigma\alpha} = \mathbb{C}E_\alpha$ и $\sigma E_{-\alpha} \subset \mathbb{C}E_{-\alpha}$, мы имеем $[C_\alpha - \sigma C_\alpha, \mathfrak{a}] = 0$. Поскольку $C_\alpha - \sigma C_\alpha \in (1 - \sigma)\ \mathfrak{u} = i\mathfrak{p}$, то $C_\alpha - \sigma C_\alpha \in i\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$. Так как $C_\alpha - \sigma C_\alpha \in \mathbb{C}E_\alpha + \mathbb{C}E_{-\alpha}$, мы имеем $C_\alpha - \sigma C_\alpha = 0$.

Аналогично $S_\alpha - \sigma S_\alpha = 0$. Следовательно, $\sigma E_\alpha = E_\alpha$ и $\sigma E_{-\alpha} = E_{-\alpha}$.

3) Если $\sigma\alpha < 0$ и $\sigma\beta < 0$, то $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma\alpha + \sigma\beta < 0$. □

(4.7.2) (К. Ивасава) $\mathfrak{n} = (\sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{C}E_\alpha) \cap \mathfrak{g}$ *есть нильпотентная подалгебра в* $\mathfrak{g}$, *такая что эндоморфизм*, $\operatorname{ad} X$ *нильпотентен для любого* $X \in \mathfrak{n}$ *и* $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ *является разрешимой подалгеброй. Далее,*

$$\mathfrak{g} = k \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Доказательство. В силу (4.7.1), 3), $\tilde{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{C}E_\alpha$ — подалгебра в $\tilde{\mathfrak{g}}$, и, поскольку $(\operatorname{ad} E_\alpha)^j E_\beta \subset E_{j\alpha+\beta}$ ($j = 1, 2, \ldots$), эндоморфизм $\operatorname{ad} X$ ($X \in \tilde{\mathfrak{n}}$) нильпотентен. Отсюда следует, в частности, что $\tilde{\mathfrak{n}}$ — нильпотентная алгебра Ли, а значит, нильпотентна и алгебра $\mathfrak{n}$. Так как $[\mathfrak{a}, \tilde{\mathfrak{n}}] \subset \tilde{\mathfrak{n}}$, то $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ и, поскольку алгебра $\mathfrak{a}$ абелева, $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ является подалгеброй. Из соотношения $[\mathfrak{a} + \mathfrak{n}, \mathfrak{a} + \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ следует, что эта подалгебра разрешима.

Для $H \in \mathfrak{a}$ и $\alpha \in \Delta$ имеем $\alpha(H) \in \mathbb{R}$, так что $\operatorname{ad} H$ — полупростой эндоморфизм с вещественными собственными значениями. Следовательно, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} = 0$ и для каждого $X \in \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ все собственные значения эндоморфизма $\operatorname{ad} X$ вещественны. С другой стороны, если $Y \in \mathfrak{k}$, то, как мы знаем, $\operatorname{ad} Y$ — полупростой эндоморфизм с чисто мнимыми собственными значениями. Следовательно, $\operatorname{ad}(\mathfrak{k}) \cap \operatorname{ad}(\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) = 0$, т. е. $\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) = 0$.

Поскольку $\mathfrak{k} + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, достаточно показать, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \tilde{\mathfrak{n}}$. Ввиду того что $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i(1 - \sigma)\mathfrak{u}$, мы можем ограничиваться доказательством включения $i(1 - \sigma)\mathfrak{u} \subset \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \tilde{\mathfrak{n}}$. Так как $\mathfrak{u} = \mathbb{R}iH_1 + \ldots + \mathbb{R}iH_l + \sum_{\alpha>0} (\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha)$ и для $\alpha \in \Delta_0$, в силу (4.7.1), 2), $\sigma C_\alpha = C_\alpha$ и $\sigma S_\alpha = S_\alpha$, то нам остается только показать, что $i(1 - \sigma)X \in \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \tilde{\mathfrak{n}}$ для $X = iH_j$ ($1 \leqslant j \leqslant l$), C_α, S_α ($\alpha \in \Delta_+$).

Очевидно, $i(1 - \sigma) iH_j \in \mathfrak{a}$. Далее, для любого $\alpha \in \Delta_+$ непосредственный подсчет дает

$$i(1 - \sigma)C_\alpha = -(S_\alpha + \sigma S_\alpha) + 2i(E_\alpha - \sigma E_{-\alpha}),$$

и, поскольку для любого $\alpha \in \Delta_+$ мы имеем $-\sigma\alpha \in \Delta_+$, то $E_\alpha - \sigma E_{-\alpha} \in \tilde{\mathfrak{n}}$. Так как $S_\alpha + \sigma S_\alpha \in (1 + \sigma)\mathfrak{u} = \mathfrak{k}$, то $i(1 - \sigma)C_\alpha \in \mathfrak{k} + \tilde{\mathfrak{n}}$. Аналогично проверяется, что $i(1 - \sigma)S_\alpha \in \mathfrak{k} + \tilde{\mathfrak{n}}$. □

В качестве иллюстрации к изложенной теории рассмотрим пример $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Здесь можно взять

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \colon {}^t\overline{X} = -X\}.$$

Тогда

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}): {}^tX = -X\},$$

$$\mathfrak{a} = \operatorname{sdiag}(n, \mathbb{R}) = \{X \in (x_{ij}) \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}): x_{ij} = 0, \quad i \neq j\},$$

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{u}(n, \mathbb{R}) = \{X = (x_{ij}) \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}): x_{ij} = 0, \quad i \geqslant j\}.$$

Равенство $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ следует из (4.7.2), но его легко доказать и непосредственно.

Упражнение 1. В обозначениях данного параграфа, для всякой полупростой алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ над $\mathbb{C}$

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{u} \oplus \sum \mathbb{R}H_i \oplus \sum_{\alpha>0} \mathbb{C}E_\alpha$$

есть разложение Ивасавы для $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Упражнение 2. Если рассматривать $\alpha \in \Delta$ как $\mathbb{C}$-значный линейный функционал на подалгебре Картана $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ алгебры $\mathfrak{g}$, то $(\sigma\alpha)(H) = \overline{\alpha(H)}$.

Глава 5

ГРУППЫ, СВЯЗАННЫЕ С КОРНЕВЫМИ СИСТЕМАМИ

5.1. Введение и обозначения

Начнем с того, что коротко напомним основные результаты гл. 2.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана. Пусть Δ — корневая система алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Тогда Δ является подмножеством пространства $\mathfrak{h}^*$, двойственного к $\mathfrak{h}$. Далее, форма Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ невырожденна на $\mathfrak{h}$, и поэтому для произвольного $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ мы можем определить элемент $H_\lambda \in \mathfrak{h}$ условием

$$B(H_\lambda, H) = \lambda(H) \text{ для всех } E \in \mathfrak{h}.$$

Введем скалярное произведение (невырожденную симметричную билинейную форму) в $\mathfrak{h}^*$, полагая

$$\langle\lambda, \mu\rangle = \lambda(H_\mu) = \mu(H_\lambda) = B(H_\lambda, H_\mu) \quad (\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*).$$

Пусть E — вещественная линейная оболочка множества Δ в $\mathfrak{h}^*$: $E = \sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}\alpha$. Если $\operatorname{rank} g = \dim\mathfrak{h} = \dim\mathfrak{h}^* = l$, то E также имеет размерность l над $\mathbb{R}$ и скалярное произведение является положительно-определенным на E.

Рассматриваемая как подмножество пространства E корневая система Δ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $0 \notin \Delta$ *и для любого* $\alpha \in \Delta$ *мы имеем* $\mathbb{R}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$.

(2′) *Для любых* $\alpha, \beta \in \Delta$

$$2\frac{\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \beta - 2\frac{\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha \in \Delta.$$

(3) Δ *порождает* E *как линейное пространство.*

Для всякого $\lambda \in H$ определим элемент $S_\lambda \in \mathfrak{gl}(E)$ условием

$$S_\lambda\xi = \xi - 2\frac{\langle\xi, \lambda\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda \quad (\xi \in E).$$

Ясно, что S_λ — это отражение относительно гиперплоскости $P_\lambda = \{\xi \in E: \langle\lambda, \xi\rangle = 0\}$ (*см. рис. 1*). Пусть 0 (E) обозначает ортогональную группу эвклидова пространства E:

$$O(E) = \{T \in GL(E): \langle T\xi, T\eta\rangle = \langle\xi, \eta\rangle \text{ для } \xi, \eta \in E\}.$$

огда $S_\lambda \in O(E)$, и если $\alpha, \beta \in \Delta$, то $S_\alpha\beta \in \Delta$, ввиду (2′),

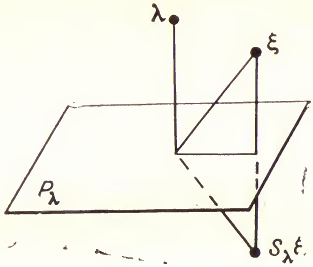


Рис. 1.

Докажем, что всякое подмножество Δ пространства E, удовлетворяющее условиям (1) и (2′), удовлетворяет следующему условию (2) (см. упр. 4 § 2.4):

(2) *Если* $\alpha, \beta \in \Delta$, *то* $\beta - k\alpha \in \Delta$ *для любого целого числа* k, *заключенного между* 0 *и* $2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle$.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$ и $\alpha \neq \pm\beta$. Если $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$, то доказывать нечего. Предположим вначале, что $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$. Если $\langle\alpha, \alpha\rangle \geqslant \langle\beta, \beta\rangle$, то из неравенств $2\langle\alpha, \alpha\rangle \geqslant \langle\alpha, \alpha\rangle + \langle\beta, \beta\rangle > 2\langle\alpha, \beta\rangle$ получаем $0 < \langle\alpha, \beta\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle < 1$. Так как $2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$, то $2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle = 1$ и $\beta - \alpha = S_\alpha\beta \in \Delta$, в силу (2′). Если $\langle\beta, \beta\rangle \geqslant \langle\alpha, \alpha\rangle$, то аналогично доказывается, что $\alpha - \beta \in \Delta$, и потому $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta) \in \Delta$, согласно (1). Отсюда вытекает, что $S_\alpha(\beta - \alpha) = S_\alpha\beta + \alpha \in \Delta$. Следовательно, если $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$, то $\beta - \alpha, S_\alpha\beta + \alpha \in \Delta$; повторяя это рассуждение, заключаем, что $\beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha, \ldots, S_\alpha\beta \in \Delta$.

Если $\langle\alpha, \beta\rangle < 0$, то $\langle-\alpha, \beta\rangle > 0$, что позволяет свести этот случай к предыдущему. □

Иногда бывает удобно определить скалярное произведение в $\mathfrak{h}$ формулой

$$(H, H') = -\frac{1}{(2\pi)^2} B(H, H') \quad (H, H' \in \mathfrak{h})$$

и отождествлять элемент $\lambda \in E$ с элементом $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{h}$, для которого

$$\lambda(H) = 2\pi\sqrt{-1}\,(\varphi(\lambda), H) \quad (H \in \mathfrak{h}),$$

так что $H_\lambda = 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi(\lambda)$. Пусть $\mathfrak{h}_r$ — вещественная линейная оболочка множества $\{H_\alpha : \alpha \in \Delta\}$. Тогда φ есть изоморфизм векторных пространств

$$E \to \sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_r = \mathfrak{t}$$

и

$$\langle\lambda, \mu\rangle = (\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) \quad (\lambda, \mu \in E).$$

Учитывая это, мы будем при необходимости опускать символ φ и рассматривать Δ как подмножество в $\mathfrak{h}$.

Далее, введем в E какое-нибудь лексикографическое упорядочение и обозначим через Δ^+ множество всех положительных корней. Положительный корень α называется простым, если его нельзя представить в виде суммы $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in \Delta^+$. Пусть π — множество всех простых корней. Тогда

(4) $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *образует базис пространства* E.

(5) *Если* $\beta \in \Delta$, *то* $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$, *где* $n_j \in \mathbb{Z}$, *причем либо все* n_j *неотрицательны, либо все* n_j *положительны, т. е.* π — *фундаментальная система в* Δ; *обратно, всякая фундаментальная система в* Δ *является множеством простых корней относительно некоторого упорядочения* (см. (2.4.5)).

В § 2.4 было введено также понятие π-системы как подмножества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset E$, для которого выполняются условия:

(6) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — *базис в* E.

(7) *Числа* $c_{ij} = -2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle/\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle$ *целы и неотрицательны при* $i \neq j$.

Мы называем c_{ij} числами Картана, а матрицу — (c_{ij}) — матрицей Картана π-системы $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$.

Всякая фундаментальная система π в Δ является π-системой. Но, как было показано в гл. 2, для любой π-системы π существуют полупростая алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ с подалгеброй Картана $\bar{\mathfrak{h}}$ и корневой системой $\bar{\Delta}$ и фундаментальная система $\bar{\pi}$ в $\bar{\Delta}$, такие что $\pi \cong \bar{\pi}$. Далее, из $\pi \cong \bar{\pi}$ следует, что $\Delta \cong \bar{\Delta}$ и $\mathfrak{g} \cong \bar{\mathfrak{g}}$ (см. (2.6.2) и (2.6.6)). Это означает, что π определяет $\mathfrak{g}$ и Δ.

Напомним теперь конструкцию компактной вещественной формы $\mathfrak{u}$ алгебры $\mathfrak{g}$, описанную в § 4.3. Для любого $\alpha \in \Delta$ существует элемент $E_\alpha \in \mathfrak{g}$, такой что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}E_\alpha,$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0, \quad \alpha(\mathfrak{h}_r) \subset \mathbb{R},$$

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha, \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha \in \mathfrak{h}_r,$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta} \quad \text{при} \quad \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta,$$

где

$$0 \neq N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} \in \mathbb{R}.$$

Множество $\{E_\alpha: \alpha \in \Delta\}$, удовлетворяющее перечисленным выше условиям, называется *базисом Вейля* алгебры $\mathfrak{g}$ (по модулю $\mathfrak{h}$). Для данного базиса Вейля $\{E_\alpha\}$ подалгебра

$$\mathfrak{u} = \{H + \sum x_\alpha H_\alpha: H \in t = \sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_r, \ \bar{x}_\alpha = x_{-\alpha} \quad \text{для всех } \alpha \in \Delta\}$$

является компактной вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$. Заметим, что, используя описанное выше отождествление, можно написать

$$\Delta (= \varphi(\Delta)) \subset \mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}.$$

В этой главе мы будем изучать группы эвклидовых движений пространства E, связанные с Δ. Мы сохраняем обозначения настоящего параграфа на протяжении всей главы.

Последняя часть главы основана преимущественно на работах Ивахори и Мацумото.

5.2. Группы Вейля

Пусть E — векторное пространство размерности l над $\mathbb{R}$ с положительно-определенным скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ и Δ — корневая система в E, т. е.

(1) $0 \notin \Delta$ и $\mathbb{R}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$ для любого $\alpha \in \Delta$;

(2′) из того, что $\alpha, \beta \in \Delta$, следует, что $2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$ и $S_\alpha\beta \in \Delta$;

(3) Δ порождает E.

Пусть, как и выше, $\mathrm{O}(E)$ обозначает ортогональную группу пространства E.

Определение. Подгруппа в $\mathrm{O}(E)$, порожденная множеством $\{S_\alpha: \alpha \in \Delta\}$, называется *группой Вейля* системы Δ и обозначается $\mathrm{Ad}(\Delta)$. Далее, группа

$$\mathrm{Aut}(\Delta) = \{T \in \mathrm{O}(E): T\Delta = \Delta\}$$

называется *группой автоморфизмов системы* Δ.

(5.2.1) $\mathrm{Aut}(\Delta)$ — *конечная группа, и* $\mathrm{Ad}(\Delta)$ — *нормальная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(\Delta)$.

Доказательство. Каждое преобразование T из $\mathrm{Aut}(\Delta)$ индуцирует некоторую перестановку множества Δ, и потому $\mathrm{Aut}(\Delta)$ можно отождествить с соответствующей подгруппой симметрической группы конечного множества Δ.

Если $T \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ и $\alpha \in \Delta$, то $TS_\alpha T^{-1} = S_{T\alpha}$, так что $\mathrm{Ad}(\Delta)$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\Delta)$. □

Положим

$$E' = E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha.$$

Определение. Связные компоненты множества E' называются *камерами Вейля.*

Из этого определения сразу следует, что каждая камера Вейля есть открытое линейно-связное множество в E.

(5.2.2) 1) *Пусть W — камера Вейля и $T \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Тогда и TW — камера Вейля.*

2) *Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система в Δ. Тогда множество*

$$W(\pi) = \{\xi \in E \colon \langle \alpha_1, \xi \rangle > 0, \ldots, \langle \alpha_l, \xi \rangle > 0\}$$

является камерой Вейля.

Доказательство. 1) Так как $TP_\alpha = P_{T\alpha}$, то $TE' = E'$. Поскольку T представляет собой гомеоморфизм, TW является связной компонентой множества E' и, значит, камерой Вейля.

2) Всякое $\beta \in \Delta$ записывается в виде $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$ $(n_j \in \mathbb{Z})$, где коэффициенты n_j либо все неположительны, либо все неотрицательны. Поэтому для $\xi \in W(\pi)$ мы имеем $\langle \beta, \xi \rangle \neq 0$ и $\xi \in E'$.

Очевидно, что для любых $\xi, \eta \in W(\pi)$ отрезок $t\xi + (1 - t)\eta$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ содержится в $W(\pi)$, т. е. множество $W(\pi)$ выпукло, а значит, связно.

Пусть теперь $\xi \in W(\pi)$ и $\eta \in E' \setminus W(\pi)$. Тогда найдется такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant l$, что $\langle \alpha_j, \eta \rangle < 0$. Поскольку $\langle \alpha_j, \xi \rangle > 0$, всякая кривая, соединяющая ξ и η, пересекает P_{α_j}. Следовательно, $W(\pi)$ есть связная компонента множества E'. □

(5.2.3) *Пусть $\pi_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система в Δ. Положим*

$$S_j = S_{\alpha_j} \quad (1 \leqslant j \leqslant l) \quad \text{и} \quad W(\pi_0) = W_0.$$

1) *$\{S_1, \ldots, S_l\}$ — порождающая система для $\mathrm{Ad}(\Delta)$.*

2) *Для каждой камеры Вейля W найдется такое преобразование $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, что $SW_0 = W$.*

3) *Всякая фундаментальная система в Δ есть система вида $S\pi_0$, где $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, и, обратно, $S\pi_0$ является фундаментальной системой в Δ при любом $S \in \mathrm{Add}(\Delta)$.*

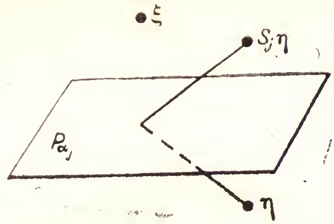


Рис. 2.

4) *Каждый корень* $\beta \in \Delta$ *можно записать в виде*

$$S_{j_1}S_{j_2}\ldots S_{j_k}\alpha_i, \quad \text{где} \quad i,\ j_1,\ \ldots,\ j_k = 1,\ \ldots,\ l,$$

и для любой фундаментальной системы π *в* Δ *имеет место равенство* $\Delta = \mathrm{Ad}(\Delta)\,\pi$.

Доказательство. Обозначим через G подгруппу в Add (Δ), порожденную множеством $\{S_1, \ldots, S_l\}$.

(a) Докажем прежде всего, что каждая камера Вейля W совпадает с SW_0 для некоторого $S \in G$.

Пусть $\xi \in W_0$ и $\zeta \in W$. Выберем такой элемент $S_0 \in G$, что $\| S_0\zeta - \xi \| \leqslant \| S\zeta - \xi \|$ для всех $S \in G$, и положим $S_0\zeta = \eta$. Допустим, что $\eta \notin W_0$. Тогда найдется номер j, для которого $\langle \alpha_j, \eta \rangle < 0$. Следовательно, ξ и $S_j\eta$ лежат по одну сторону от гиперплоскости P_{α_j}, а η — по другую ее сторону (*рис. 2*). Значит, $\| \xi - S_j\eta \| < \| \xi - \eta \|$ — противоречие. Более подробно, выберем в E ортонормированный базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$, в котором $\varepsilon_1 = \alpha_j/\| \alpha_j \|$. Тогда $S_j\varepsilon_1 = -\varepsilon_1$ и $S_j\varepsilon_k = \varepsilon_k$ при $k > 1$. Положим $\xi = x_1\varepsilon_1 + \ldots + x_l\varepsilon_l$, $\eta = y_1\varepsilon_1 + \ldots + y_l\varepsilon_l$. Так как $\langle \alpha_j, \xi \rangle > 0$ и $\langle \alpha_j, \eta) < 0$, то $x_1 > 0$, $y_1 < 0$ и

$$\| \xi - \eta \|^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_l - y_l)^2.$$

Из равенства $S_j\eta = -y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \ldots + y_l\varepsilon_l$ получаем

$$\| \xi - S_j\eta \|^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_l - y_l)^2 < \| \xi - \eta \|^2.$$

Мы пришли к противоречию. Тем самым показано, что $S_0(W) \cap W_0 \neq \varnothing$, откуда следует, что $S_0W = W_0$.

(b) Теперь докажем, что для любого $\alpha \in \Delta$ найдутся такие $\alpha_j \in \pi_0$ и $S \in G$, что $S\alpha = \alpha_j$.

Выберем $\xi \in P_\alpha$ так, чтобы $\xi \notin P_\beta$ при всех $\beta \neq \pm\alpha$. Возьмем $\varepsilon > 0$, настолько малое, что для всякого $\eta \in U = \{\zeta \in E\colon \| \zeta - \xi \| < \varepsilon\}$ выполняется неравенство $\langle \beta, \xi \rangle \langle \beta, \eta \rangle > 0$, т. е. ξ и η лежат в одном и том же полупространстве, ограниченном гиперплоскостью P_β, при всех $\beta \neq \pm\alpha$. Очевидно, что множество $U' = U \cap \{\zeta \in E\colon \langle \alpha, \zeta \rangle > 0\}$ связно и содержится в некоторой камере Вейля, скажем W. В силу (a), найдется преобразование $S \in G$, для которого $SW = W_0$.

Допустим, что $S\alpha \neq \pm\alpha_j$ для всех $j = 1, \ldots, l$. Тогда для каждого $\eta \in U'$ числа $\langle S^{-1}\alpha_j, \eta\rangle = \langle \alpha_j, S\eta\rangle$ и $\langle S^{-1}\alpha_j, \xi\rangle = \langle \alpha_j, S\xi\rangle$ имеют одинаковые знаки. С другой стороны, из соотношений $S\eta \in SU' \subset SW = W_0$ следует, что $\langle \alpha_j, S\eta\rangle > 0$ при $j = 1, 2, \ldots, l$. Это означает, что $S\xi \in W_0$, в противоречие с условием $S\xi \in SP_\alpha = P_{S\alpha}$. Таким образом, $S\alpha = \alpha_j$ или $S\alpha = -\alpha_j$ для некоторого j. Если $S\alpha = -\alpha_j$, то $S_jS\alpha = \alpha_j$, а $S_jS \in G$.

(c) Докажем, что $S_\alpha \in G$ для всех $\alpha \in \Delta$, откуда будет следовать, что $G = \mathrm{Ad}\,(\Delta)$.

Для любого $T \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$ имеем $TS_\alpha T^{-1} = S_{T\alpha}$. С другой стороны, $S\alpha = \alpha_j$ для некоторого j и некоторого $S \in G$, в силу (b). Отсюда $SS_\alpha S^{-1} = S_j$ и $S_\alpha = S^{-1}S_jS \in G$.

Заметим, что из (b) и (c) вытекает 4).

(d) Пусть $\pi = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ — фундаментальная система в Δ. Найдем преобразование $S \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$, для которого $S\pi_0 = \pi$.

Поскольку $W(\pi)$ — камера Вейля, существует преобразование $S \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$, такое что $SW_0 = W(\pi)$. Отсюда следует, что для вектора $\xi \in E$ тогда и только тогда $\langle\beta_j, \xi\rangle > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant l)$, когда $\langle S\alpha_j, \xi\rangle = \langle\alpha_j, S^{-1}\xi\rangle > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant l)$. Следовательно, граница множества $W(\pi)$ содержится в $\bigcup_{j=1}^{l} P_{S\alpha_j}$ и также в $\bigcup_{j=1}^{l} P_{\beta_j}$. Значит, наборы $\{P_{S\alpha_1}, \ldots, P_{S\alpha_l}\}$ и $\{P_{\beta_1}, \ldots, P_{\beta_l}\}$ совпадают с точностью до порядка. Если $P_{\beta_j} = P_{S\alpha_k}$, то $S\alpha_k \in \mathbb{R}\beta_j$, а потому $S\alpha_k = \pm\beta_j$. Но для любого $\xi \in W_0$ мы имеем $\langle\beta_j, S\xi\rangle > 0$, и из равенства $\beta_j = -S\alpha_k$ следовало бы, что $\langle\alpha_k, \xi\rangle = \langle S\alpha_k, S\xi\rangle < 0$, — противоречие. Таким образом, $S\alpha_k = \beta_j$ и $S\pi_0 = \pi$.

(e) Пусть $T \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$ и $\beta \in \Delta$. Тогда β можно записать в виде $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$, так что $T\beta = n_1T\alpha_1 + \ldots + n_lT\alpha_l$, где $n_j \in \mathbb{Z}$, причем либо все $n_j \geqslant 0$, либо все $n_j \leqslant 0$. Следовательно, $T\pi_0$ — также фундаментальная система.

Предложение полностью доказано. □

Определение. Пусть π — фундаментальная система в Δ. Группа

$$\mathrm{Aut}\,(\pi) = \{S \in \mathrm{O}\,(E)\colon S\pi = \pi\}$$

называется *группой автоморфизмов системы* π.

(5.2.4) $\mathrm{Aut}\,(\pi)$ — *подгруппа в* $\mathrm{Aut}\,(\Delta)$, *такая что*

$$\mathrm{Aut}\,(\Delta) = \mathrm{Ad}\,(\Delta)\,\mathrm{Aut}\,(\pi).$$

Доказательство. В силу (2.6.2), для любого $S \in \mathrm{Aut}\,(\pi)$ мы имеем $S\Delta = \Delta$. Поэтому $\mathrm{Aut}\,(\pi) \subset \mathrm{Aut}\,(\Delta)$. Обратно, пусть $T \in \mathrm{Aut}\,(\Delta)$. Тогда $T\pi$ — фундаментальная система, и, согласно (5.2.3), 3), $S\pi = T\pi$ для некоторого $S \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$. Следовательно, $S^{-1}T \in \mathrm{Aut}\,(\pi)$. □

Замечание. Фигурирующее выше произведение Ad (Δ) Aut (π) является *полупрямым*, т. е. Ad (Δ) $\cap$ Aut (π) = 1. Этот факт будет доказан в следующем параграфе.

Упражнение 1. Пусть Δ (A_l) — корневая система, соответствующая диаграмме A_l. Доказать, что группа Ad (Δ (Al)) изоморфна симметрической группе множества $\{1, 2, \ldots, l+1\}$.

Упражнение 2. Найти Aut (Δ (Al)).

Упражнение 3. Пусть $W = SW_0$, где $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, — камера Вейля. Если она инвариантна относительно преобразования $T \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, то это преобразование переставляет элементы множества $\{S\alpha_1, \ldots, S\alpha_l\}$.

5.3. Группа автоморфизмов полупростой алгебры Ли над $\mathbb{C}$

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, Δ — совокупность корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ и $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — множество простых корней относительно некоторого фиксированного упорядочения.

Обозначим через $N = N(\mathfrak{h})$ подгруппу в Aut ($\mathfrak{g}$), состоящую из всех автоморфизмов σ, для которых $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, и положим $N^0 = N \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$.

(5.3.1) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})\cdot N,$

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = N/N^0.$$

Доказательство. Для любого $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ подалгебра $\sigma\mathfrak{h}$ будет подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$; поэтому, согласно (4.6.4), найдется автоморфизм $\tau \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$, для которого $\tau\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, т. е. $\tau\sigma \in N$, откуда $\sigma \in \tau^{-1}N \subset \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})\cdot N$.

Так как $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})\cdot N$, то

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = (\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})\cdot N)/\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \cong N/(N \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})) = N/N^0.$$

Положим

$$\mathfrak{h}_r = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha, \qquad E = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}\alpha.$$

(5.3.2) 1) *Пусть* $\sigma \in N$. *Тогда* $\sigma\mathfrak{h}_r = \mathfrak{h}_r$, *и, определяя* $f(\sigma) \in$ GL (E) *формулой*

$$(f(\sigma)\xi)(H) = \xi(\sigma^{-1}H) \quad (H \in \mathfrak{h}_r,\ \xi \in E),$$

мы получаем гомоморфизм f *группы* N *на* Aut (Δ).

2) $\sigma H_\lambda = H_{f(\sigma)\lambda}$ *для всех* $\lambda \in E$.

3) *Ядро гомоморфизма* f *равно* $\exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{h})$.

Доказательство. 1) Применяя $\sigma \in N$ к обеим частям равенства $[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$, находим, что $[\sigma H, \sigma E_\alpha] = \alpha(H)\sigma E_\alpha$, т. е.

$$[H, \sigma E_\alpha] = \alpha(\sigma^{-1}H)\sigma E_\alpha \quad \text{при} \quad H \in \mathfrak{h}.$$

Пусть $\beta(H) = \alpha(\sigma^{-1}H)$. Ясно, что $\beta \in \Delta$. Определим $f'(\sigma) \in \in GL(\mathfrak{h}^*)$ формулой $(f'(\sigma)\xi)(H) = \xi(\sigma^{-1}H)$ $(H \in \mathfrak{h}, \xi \in \mathfrak{h}^*)$. Тогда $f'(\sigma)\Delta = \Delta$, а потому $f'(\sigma)E = E$ и $\sigma\mathfrak{h}_r = \mathfrak{h}_r$. Следовательно, ограничение $f(\sigma)$ отображения $f'(\sigma)$ на E принадлежит $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Для $\sigma, \tau \in N$, $\alpha \in \Delta$ и $H \in \mathfrak{h}_r$

$$(f(\sigma)(f(\tau)\alpha))(H) = (f(\tau)\alpha)(\sigma^{-1}H) = \alpha(\tau^{-1}\sigma^{-1}H)$$
$$= \alpha((\sigma\tau)^{-1}H) = (f(\sigma\tau)\alpha)(H).$$

В силу (2.6.7), для каждого $T \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ существует такой автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{g}$, что $\sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ и $f(\sigma) = T$. Следовательно, гомоморфизм f сюръективен.

2) Положим $f(\sigma) = S$. Для любого $\xi \in E$

$$\xi(\sigma^{-1}H_{S\lambda}) = (S\xi)(H_{S\lambda}) = \langle S\xi, S\lambda\rangle = \langle \xi, \lambda\rangle = \xi(H_\lambda).$$

Значит, $\sigma^{-1}H_{S\lambda} = H_\lambda$, т. е. $\sigma H_\lambda = H_{S\lambda}$.

3) Если $f(\sigma) = 1$, то $\sigma = \mathrm{id}$ на $\mathfrak{h}$. Применяя σ к обеим частям равенства $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$, получаем $[H, \sigma E_\alpha] = \alpha(H)\sigma E_\alpha$. Следовательно, $\sigma E_\alpha = q(\alpha)E_\alpha$ для некоторого $q(\alpha) \in \mathbb{C}$.

Так как $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha \in \mathfrak{h}$, то $q(\alpha)q(-\alpha) = 1$, а из равенства $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$ следует, что $q(\alpha)q(\beta) = q(\alpha + \beta)$, если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$.

Докажем утверждение:

(*) если $\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l \in \Delta$, то $q(\beta) = q(\alpha_1)^{n_1} \cdots q(\alpha_l)^{n_l}$,

используя индукцию по $|\beta| = |n_1 + \ldots + n_l|$.

В случае $|\beta| = 1$ это утверждение очевидно. Допустим, что $\beta \in \Delta$, $|\beta| \geqslant 2$ и (*) справедливо для всех $\gamma \in \Delta$, с $|\gamma| < |\beta|$. Предположим вначале, что $\beta > 0$. Тогда, в силу (2.6.1), найдутся такие $\gamma > 0$ и $\alpha_j \in \pi$, что $\beta = \gamma + \alpha_j$. Если $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$, то $\gamma = n_1\alpha_1 + \ldots + (n_j - 1)\alpha_j + \ldots + n_l\alpha_l$ и по предположению индукции

$$q(\gamma) = q(\alpha_1)^{n_1} \ldots q(\alpha_j)^{n_j - 1} \ldots q(\alpha_l)^{n_l}.$$

Следовательно,

$$q(\beta) = q(\gamma)q(\alpha_j) = q(\alpha_1)^{n_1} \ldots q(\alpha_l)^{n_l}.$$

Поскольку $q(\beta)q(-\beta) = 1$, (*) выполняется и для $-\beta$. Итак, утверждение (*) доказано.

Так как $q(\alpha_j) \neq 0$, то существуют числа $r_j \in \mathbb{C}$, для которых $\exp r_j = q(\alpha_j)$. Поскольку множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ линейно-не-

зависимо, найдется такой элемент $H_0 \in \mathfrak{h}$, что $\alpha_j(H_0) = r_j$ и потому $\exp(\alpha_j(H_0)) = q(\alpha_j)$. Применяя (*), получаем

$$\exp \alpha(H_0) = q(\alpha) \text{ при } \alpha \in \Delta.$$

Следовательно, $\exp(\operatorname{ad} H_0) H = H$ при $H \in \mathfrak{h}$ и $\exp(\operatorname{ad} H_0) E_\alpha = q(\alpha) E$, т. е. $\sigma = \exp(\operatorname{ad} H_0)$.

То что $f(\exp(\operatorname{ad} \mathfrak{h})) = 1$, очевидно. □

Замечание. Из 2) следует, что если отождествить $\lambda \in E$ с $H_\lambda \in \mathfrak{h}_r$ или с $2\pi\sqrt{-1}H_\lambda \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_r = \mathfrak{t}$, то S совпадает с ограничением автоморфизма σ на $\mathfrak{h}$ или соответственно на $\mathfrak{t}$.

(5.3.3) $f(N^0) \supset \operatorname{Ad}(\Delta)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\alpha \in \Delta$ найдется элемент $X_\alpha \in \mathfrak{g}$, такой что $\exp(\operatorname{ad} X_\alpha)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ и $f(\exp(\operatorname{ad} X_\alpha)) = S_\alpha$. Положим

$$X = X_\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{2\langle\alpha, \alpha\rangle}}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \quad \sigma = \exp(\operatorname{ad} X).$$

Индукцией по k можно доказать, что

$$(\operatorname{ad} X)^{2k+1} H = (-1)^{k+1} \pi^{2k+1} \frac{\alpha(H)}{\sqrt{2\langle\alpha, \alpha\rangle}} (E_\alpha - E_{-\alpha}),$$

$$(\operatorname{ad} X)^{2k+2} H = (-1)^{k+1} \pi^{2k+2} \frac{\alpha(H)}{\langle\alpha, \alpha\rangle} H_\alpha,$$

$$H \in \mathfrak{h}, \quad H_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поэтому

$$\sigma H = H + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (\operatorname{ad} X)^{2k+1} H + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)!} (\operatorname{ad} X)^{2k+2} H$$

$$= H + \frac{\alpha(H)}{\sqrt{2\langle\alpha, \alpha\rangle}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} (E_\alpha - E_{-\alpha})$$

$$+ \frac{\alpha(H)}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\pi^{2k+2}}{(2k+2)!} H_\alpha$$

$$= H - \frac{\alpha(H)}{\sqrt{2\langle\alpha, \alpha\rangle}} \sin\pi \cdot (E_\alpha - E_{-\alpha}) + \frac{\alpha(H)}{\langle\alpha, \alpha\rangle} (\cos\pi - 1) H_\alpha$$

$$= H - \frac{2\alpha(H)}{\langle\alpha, \alpha\rangle} H_\alpha.$$

Следовательно, для $\xi \in E$ и $H \in \mathfrak{h}$

$$(f(\sigma^{-1})\,\xi)(H) = \xi(\sigma H) = \left(\xi - \frac{2\langle \xi, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha\right)(H)$$

и, значит, $f(\sigma^{-1}) = S_\alpha$. Так как $S_\alpha^2 = 1$, то $f(\sigma) = S_\alpha$. □

Для $s \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ и $c \in \mathbb{C}$ положим

$$\mathfrak{g}(s, c) = \{X \in g\colon (s - c1)^n X = 0\}, \quad \text{где} \quad n = \dim \mathfrak{g}.$$

(5.3.4) *Для любого* $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$

$$\dim \mathfrak{g}(\sigma, 1) \geqslant \mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = l.$$

Доказательство. Пусть $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. Положим

$$c(x, \sigma) = \det(x1 - \sigma) = (x-1)^n + c_{n+1}(\sigma)(x-1)^{n+1} + \cdots + c_0(\sigma).$$

Ясно, что $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — голоморфные функции на $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. С другой стороны, для $X \in \mathfrak{g}$ и $\sigma = \exp(\mathrm{ad}\,X)$ имеем $\mathfrak{g}(\sigma, 1) \supset \mathfrak{g}(\mathrm{ad}\,X, 0)$ и $\dim \mathfrak{g}(\mathrm{ad}\,X, 0) \geqslant l$, откуда $\dim \mathfrak{g}(\sigma, 1) \geqslant l$ и, значит, $c_0(\sigma) = c_1(\sigma) = \cdots = c_{l-1}(\sigma) = 0$. Из последнего утверждения теоремы (4.6.1) следует, что $c_0, c_1, \ldots, c_{l-1}$ равны нулю в некоторой окрестности единицы. Так как $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ — связное аналитическое многообразие, то $c_0, \ldots, c_{l-1}$ должны быть тождественно равны нулю на $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. Следовательно,

$$c(x, \sigma) = (x-1)^l((x-1)^{n-1} + \cdots + c_l(\sigma)) \quad \text{для} \quad \sigma \in Ad(\mathfrak{g}). \ \square$$

(5.3.5) *Для любого* $T \in \mathrm{Aut}(\pi)$ *найдется такой автоморфизм* $\tau \in N$, *что* $f(\tau) = T$ *и* $\mathfrak{g}(\tau, 1) \subset \mathfrak{h}$.

Доказательство. Поскольку отображение $f\colon N \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ сюръективно, мы можем найти элемент $\tau_0 \in N$, для которого $f(\tau_0) = T$. Так как $T\pi = \pi$, то из $\alpha > 0$ следует $T\alpha > 0$. Разложим перестановку множества Δ, индуцированную отображением T, в произведение циклов

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)\ldots,$$

где $T\beta_1 = \beta_2$, $T\beta_2 = \beta_3$, ..., $T\beta_k = \beta_1$, $T\gamma_1 = \gamma_2$, ...

Для любого $\alpha \in \Delta$ имеем $[H, \tau_0 E_\alpha] = \alpha\left(\tau_0^{-1}H\right)\tau_0 E_\alpha$ и $\alpha\left(\tau_0^{-1}H\right) = (f(\tau_0^{-1})\,\alpha)(H) = (T\alpha)(H)$, поэтому $\tau_0 E_\alpha \subset \mathfrak{g}(T\alpha)$. Но $\mathfrak{g}(\beta) = \mathbb{C}E_\beta$ для всех $\beta \in \Delta$. Следовательно, $\tau_0\mathfrak{g}(\beta_1) = \mathfrak{g}(\beta_2)$, $\tau_0\,\mathfrak{g}(\beta_2) = \mathfrak{g}(\beta_3)$, ..., $\tau_0\mathfrak{g}(\beta_k) = \mathfrak{g}(\beta_1)$ и, значит, подпространство

$$V = \mathfrak{g}(\beta_1) + \mathfrak{g}(\beta_2) + \cdots + \mathfrak{g}(\beta_k)$$

инвариантно относительно преобразования τ_0, причем сужение этого преобразования на V задается в базисе $E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_k}$ матрицей вида

$$(1)\qquad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & q_k \\ q_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & q_{k-1} & 0 \end{Vmatrix}.$$

с характеристическим многочленом $x^k - q_1 q_2 \ldots q_k$.

Для любого $H \in \mathfrak{h}$ автоморфизм $\tau_0 \cdot \exp(\operatorname{ad} H)$ также оставляет подпространство V на месте и представляется в нем матрицей вида (1), в которой все числа q_j заменяются на $q_j \cdot \exp \beta_j(H)$ и которая имеет характеристический многочлен $x^k - q_1 \cdots q_k \times \times \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j(H)\right)$. Так как все корни β_j имеют один и тот же знак, то $\sum \beta_j \neq 0$. Следовательно, множество $\{H \in \mathfrak{h}\colon\ q_1 q_2 \ldots q_k \cdot \exp(\sum \beta_j(H)) = 1\}$ является объединением счетного числа гиперплоскостей в $\mathfrak{h}$ вида $\{H \in \mathfrak{h}\colon\ \sum \beta_j(H) = r\}$, где $\exp r = (q_1 \cdots q_k)^{-1}$.

Итак, каждому циклу соответствует некоторое подмножество в $\mathfrak{h}$, являющееся объединением счетного числа гиперплоскостей. Ясно, что найдется элемент $H_0 \in \mathfrak{h}$, не принадлежащий этому объединению. Положим $\tau = \tau_0 \cdot \exp(\operatorname{ad} H_0)$.

Автоморфизм τ оставляет пространство V на месте, и 1 не является корнем характеристического многочлена его сужения на V, поскольку $q_1 \cdots q_k \cdot \exp(\sum \beta_j(H_0)) \neq 1$. Это справедливо для каждого цикла. Значит, τ не имеет собственного значения 1 в инвариантном подпространстве $\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} E_\alpha$, т. е. $\mathfrak{g}(\tau, 1) \subset \mathfrak{h}$. $\square$

(5.3.6) 1) $f(N^0) = \operatorname{Ad}(\Delta)$.
2) $\operatorname{Ad}(\Delta) \cap \operatorname{Aut}(\pi) = 1$.

Доказательство. Докажем вначале, что $f(N^0) \cap \operatorname{Aut}(\pi) = 1$. Для всякого $T \in f(N^0) \cap \operatorname{Aut}(\pi)$ можно, в силу (5.3.6), найти такой автоморфизм $\tau \in N$, что $f(\tau) = T$ и $\mathfrak{g}(\tau, 1) \subset \mathfrak{h}$. Так как $N^0 \subset \operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$, и ядро гомоморфизма f содержится в $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$, то $\tau \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$ и, ввиду (5.3.4), $\dim \mathfrak{g}(\tau, 1) \geqslant \operatorname{rank} \mathfrak{g}$. Следовательно, $\mathfrak{g}(\tau, 1) = \mathfrak{h}$. Поскольку $\tau\mathfrak{h}_r = \mathfrak{h}_r$ и для любых $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}_r$

$$\langle \tau H_1, \tau H_2 \rangle = B(\tau H_1, \tau H_2) = B(H_1, H_2) = \langle H_1, H_2 \rangle,$$

где через B обозначена форма Киллинга, то ограничение автоморфизма τ на $\mathfrak{h}_r$ является ортогональным преобразованием с единственным собственным значением 1; следовательно, τ должно быть тождественным преобразованием. Из того, что $(T\xi)(H) = \xi(\tau^{-1}H)$ при $H \in \mathfrak{h}_r$ и $\xi \in E$, вытекает, что $T = 1$.

Поскольку, в силу (5.3.3), $f(N^0) \supset \mathrm{Ad}(\Delta)$ и $f(N^0) \cap \mathrm{Aut}(\pi) = 1$, мы имеем $\mathrm{Ad}(\Delta) \cap \mathrm{Aut}(\pi) = 1$. С другой стороны, согласно (5.3.4), $\mathrm{Aut}(\Delta) = \mathrm{Ad}(\Delta) \cdot \mathrm{Aut}(\pi)$ и потому $f(N^0) = \mathrm{Ad}(\Delta)$. □

Таким образом, мы установили следующую теорему:

(5.3.7) ***Теорема*** $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \overset{1}{\cong} N/N_0 \overset{2}{\cong} \mathrm{Aut}(\Delta)/\mathrm{Ad}(\Delta) \overset{3}{\cong} \mathrm{Aut}(\pi)$, *где* $N = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\colon \sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}$ *и* $N^0 = N \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$.

Отметим, что

$\overset{1}{\cong}$ следует из сопряженности подалгебр Картана,

$\overset{2}{\cong}$ — из свойств гомоморфизма f,

$\overset{3}{\cong}$ — из разложения в полупрямое произведение

$$\mathrm{Aut}(\Delta) = \mathrm{Ad}(\Delta) \cdot \mathrm{Aut}(\pi), \quad \mathrm{Ad}(\Delta) \cap \mathrm{Aut}(\pi) = 1.$$

Пример. A_l : $\overset{\alpha_1}{\circ}\!\!-\!\!\overset{\alpha_2}{\circ}\!\!-\cdots-\!\!\overset{\alpha_l}{\circ}$ $(l \geqslant 2)$. Группа автоморфизмов этой диаграммы, очевидно, такова:

$$\mathrm{Aut}(\pi) = \left\{1, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_l \\ \alpha_l & \alpha_{l-1} & \ldots \alpha_1 \end{pmatrix}\right\},$$

и $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ — группа порядка 2.

Упражнение. Пусть Ω и Ω' — камеры Вейля (или фундаментальные системы в Δ). Тогда существует единственное преобразование $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, для которого $S\Omega = \Omega'$.

5.4. Группа автоморфизмов компактной полупростой алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{g}$ — ее комплексификация. Мы можем считать, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\gamma \in \Delta} \mathbb{C}E_\gamma,$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{t} + \sum_{\gamma > 0} (\mathbb{R}(E_\gamma + E_{-\gamma}) + \mathbb{R}i(E_\gamma - E_{-\gamma}))$$

$$= \left\{\sqrt{-1}H + \sum_{\gamma \in \Delta} x_\gamma E_\gamma\colon H \in \mathfrak{h}_r,\ \bar{x}_\gamma = x_{-\gamma},\ \text{для всех } \gamma \in \Delta\right\},$$

$$N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta} \quad \text{при } \alpha, \beta \in \Delta.$$

Поскольку алгебра $\mathfrak{u}$ является вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$, всякий ее автоморфизм единственным образом продолжается до автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$. Пользуясь этим, мы будем рассматривать $\mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$ как подгруппу в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$:

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{u}) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\colon \sigma\mathfrak{u} = \mathfrak{u}\}.$$

Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа; в частности,

$$N = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}):\ \sigma\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}.$$

Так как всякий элемент группы N оставляет на месте $\mathfrak{h}_r$, а значит, и подалгебру Картана $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{u}$, то

$$N_{\mathfrak{u}} = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u}):\ \sigma\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\} = N \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{u}).$$

Нас будет интересовать сужение гомоморфизма $f\colon N \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ на $N_{\mathfrak{u}}$. Обозначим это сужение через $f_{\mathfrak{u}}$.

Пусть $\sigma \in N$. Тогда

$$\sigma E_\alpha = q(\alpha) E_{S\alpha}, \text{ где } q(\alpha) \in \mathbb{C},\ S = f(\sigma).$$

Из равенства $\sigma(x_\alpha E_\alpha + x_{-\alpha}E_{-\alpha}) = q(\alpha)\, x_\alpha E_{S\alpha} + q(-\alpha)\, x_{-\alpha} E_{-S\alpha}$ мы заключаем, что $\sigma\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$ тогда и только тогда, когда $\overline{q(\alpha)\, x_\alpha} = q(-\alpha)\, x_{-\alpha}$ при $\bar{x}_\alpha = x_{-\alpha}$, т. е. $\overline{q(\alpha)} = q(-\alpha)$. Итак:

(5.4.1) *Автоморфизм $\sigma \in N$ принадлежит $N_{\mathfrak{u}}$ тогда и только тогда, когда $\overline{q(\alpha)} = q(-\alpha)$ для всех $\alpha \in \Delta$.*

(5.4.2) *Пусть $S \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ и $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система в Δ. Тогда существует единственный автоморфизм $\sigma \in N$, для которого $f(\sigma) = S$ и $\sigma E_{\alpha_i} = E_{S\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, l)$. При этом $\sigma \in N_{\mathfrak{u}}$.*

Доказательство. Если $\beta + i\alpha$ $(-j \leqslant i \leqslant k)$ есть α-последовательность, содержащая β, то $S\beta + iS\alpha$ $(-j \leqslant i \leqslant k)$ будет (S, α)-последовательностью, содержащей $S\beta$. Следовательно, $(N_{\alpha,\beta})^2 = (N_{S\alpha, S\beta})^2 = 2^{-1}(j + L)\, k \langle\alpha, \alpha\rangle$, т. е. $N_{\alpha,\beta} = \pm N_{S\alpha, S\beta}$. Пусть σ — такой элемент из N, что $f(\sigma) = S$ (см. (5.3.2)). Применяя σ к равенствам $[E_\gamma, E_{-\gamma}] = -H_\gamma$ и $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$, получаем

$$q(\gamma)\, q(-\gamma) = 1,$$

$$q(\alpha)\, q(\beta) = \frac{N_{\alpha,\beta}}{N_{S\alpha, S\beta}}\, q(\alpha+\beta) = \pm q(\alpha+\beta), \text{ если } \alpha+\beta \in \Delta.$$

Выберем элемент $\sigma_0 \in N$, для которого $f(\sigma_0) = S$ и $\sigma_0 E_\gamma = q_0(\gamma)\, E_{S\gamma}$. Далее, для каждого $i = 1, \ldots, l$ выберем по одному решению $\xi_i \in \mathbb{C}$ уравнения $q_0(\alpha_i) \exp \xi_i = 1$. Поскольку множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ линейно-независимо, существует элемент $H_0 \in \mathfrak{h}$, для которого $\alpha_i(H_0) = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Положим $\sigma = \sigma_0 \exp(\mathrm{ad}\, H_0)$. Тогда $\sigma E_{\alpha_i} = q_0(\gamma) \exp \alpha_i(H_0)\, E_{S\alpha_i} = E_{S\alpha_i}$. Учитывая формулу $\sigma E_\gamma = q(\gamma)\, E_{S\gamma}$, получаем $q(\alpha_1) = \cdots = q(\alpha_l) = 1$. Из равенства $q(\alpha_i)\, q(-\alpha_i) = 1$ следует, что $q(-\alpha_1) = \cdots = q(-\alpha_l) = 1$. Так как множество $\{E_{\pm\alpha_1}, \ldots, E_{\pm\alpha_l}\}$

порождает $\mathfrak{g}$, то автофорфизм σ однозначно определяется условиями $\sigma E_{\pm\alpha_i} = E_{\pm s\alpha_i}$.

Теперь убедимся, что $q(\gamma) = \pm 1$ для всех $\gamma \in \Delta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma > 0$. Будем доказывать наше утверждение индукцией относительно упорядочения в Δ^+. Для всякого положительного корня $\gamma \notin \pi$ найдутся такое $\gamma' > 0$ и такой индекс i, что $\gamma = \gamma' + \alpha_i$. Следовательно, $q(\gamma) = \pm$ $\pm q(\gamma')\, q(\alpha_i) = \pm q(\gamma')$. По предположению индукции, $q(\gamma') =$ ± 1 и, значит, $q(\gamma) = \pm 1$. Отсюда вытекает, что $q(-\gamma) =$ $= q(\gamma)$ (ибо $q(\gamma)\, q(-\gamma) = 1$). Поэтому, в силу (5.4.1), $\sigma \in h_{\mathfrak{u}}$. □

Автоморфизм σ из (5.4.2) мы будем обозначать через $\mu(S)$ и называть *нормальным автоморфизмом*, соответствующим автоморфизму S.

(5.4.3) *Отображение* $\operatorname{Aut}(\pi) \ni S \mapsto \mu(S) \in N_{\mathfrak{u}}$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть S и T принадлежит $\operatorname{Aut}(\pi)$. Так как $T\alpha_i \in \pi$, то $\mu(S)\,\mu(T)\, E_{\alpha_i} = \mu(S)\, E_{T\alpha_i} = E_{ST\alpha_i} = \mu(ST)\, E_{\alpha_i}$. Следовательно, $\mu(S)\,\mu(T) = \mu(ST)$. □

Далее нам понадобится следующий результат:

$$\operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \operatorname{Aut}(\mathfrak{u}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}),$$

доказательство которого будет дано в гл. 6 (см. (6.4.3)). Из этого результата и (5.4.2) получаем

$$\operatorname{Aut}(\mathfrak{u})/\operatorname{Ad}(\mathfrak{u}) = N_{\mathfrak{u}}/N_{\mathfrak{u}}^0 = \operatorname{Aut}(\Delta)/\operatorname{Ad}(\Delta),$$

где

$$N_{\mathfrak{u}}^0 = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}) \cap N_{\mathfrak{u}} = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}) \cap N.$$

(5.4.4) ***Теорема.*** Справедливы равенства

$$\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cdot \mu(\operatorname{Aut}(\pi)), \quad \operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \mu(\operatorname{Aut}(\pi)) = 1,$$

$$\operatorname{Aut}(\mathfrak{u}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}) \cdot \mu(\operatorname{Aut}(\pi)), \quad \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}) \cap \mu(\operatorname{Aut}(\pi)) = 1.$$

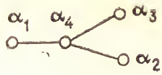
Доказательство. Имеем $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cdot N$, $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cap N = N^0$ и $f\colon N \to \operatorname{Aut}(\Delta) = \operatorname{Ad}(\Delta) \cdot \operatorname{Aut}(\pi)$. Так как $f(N^0) = \operatorname{Aut}(\Delta)$, то $N = N^0 \cdot \mu(\operatorname{Aut}(\pi))$. Значит, $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cdot \mu(\operatorname{Aut}(\pi))$. Из того, что отображение $f_{\mathfrak{u}} : N_{\mathfrak{u}} \to \operatorname{Aut}(\Delta)$ также сюръективно, следует второе равенство. □

Вычислим $\operatorname{Aut}(\pi)$ для всех простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$:

A_l $(l \geqslant 2)$

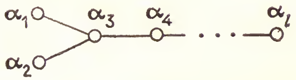
$\operatorname{Aut}(\pi) = \left\{1, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_l \\ \alpha_l & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix}\right\} \cong \mathbb{Z}_2$

D_4



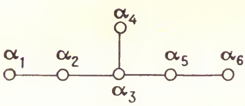
$\mathrm{Aut}(\pi) \cong$ симметричная группа на $\{1, 2, 3\}$

D_l ($l \geqslant 5$)



$\mathrm{Aut}(\pi) = \{1, (\alpha_1\alpha_2)\} \cong \mathbb{Z}_2$

E_6



$\mathrm{Aut}(\pi) = \{1, (\alpha_1\alpha_6)(\alpha_2\alpha_5)\} \cong \mathbb{Z}_2$

Во всех остальных случаях $\mathrm{Aut}(\pi) = 1$.

Упражнение. Доказать, что $\ker f_{\mathfrak{u}} = \exp(\mathrm{ad}\, \mathfrak{t})$. [*Указание*. В силу (5.4.1), $|q(\alpha)| = 1$ для $\alpha \in \Delta$. Поэтому при доказательстве утверждения 3) предложения (5.3.2) можно так выбрать элемент H_0, чтобы все числа $\alpha_j(H_0)$ были чисто мнимыми.]

5.5. Инверсия * и универсальный центр $C(\Delta)$

Пусть Δ — некоторая корневая система в E. Рассмотрим инверсию пространства E относительно сферы радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, т. е. преобразование

$$\lambda \mapsto \lambda^* = \frac{2\lambda}{\langle \lambda, \lambda \rangle} \quad \text{для } \lambda \in E \setminus \{0\}.$$

Векторы λ и λ^* одинаково направлены, и $\|\lambda\| \cdot \|\lambda^*\| = 2$. Поэтому $\lambda^{**} = \lambda$. Далее, *для любых* $\lambda, \mu \in E \setminus \{0\}$ *выполняются равенства*

$$(1) \qquad \frac{\langle \lambda^*, \mu^* \rangle}{\langle \lambda^*, \lambda^* \rangle} = \frac{\langle \lambda, \mu \rangle}{\langle \mu, \mu \rangle},$$

$$(2) \qquad (S_\lambda \mu)^* = S_{\lambda^*} \mu^*.$$

Доказательство. Равенство (1) устанавливается простым подсчетом. Чтобы доказать (2), заметим, что $S_\lambda = S_{\lambda^*}$. Отсюда очевидным образом следует, что инверсия коммутирует с отражением S_λ — $\sqrt{2}$ (*см. рис. 3*). ▯

(5.5.1) *Пусть* Δ — *корневая система в* E *и* $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — *фундаментальная система в* Δ. *Тогда*

1) Δ^* *также является корневой системой* (*называемой* и н в е р с н о й *к системе* Δ);

2) $\pi^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_l^*\}$ *есть фундаментальная система в* Δ^*;

3) *матрица Картана системы* π^* *транспонирована к матрице Картана системы* π.

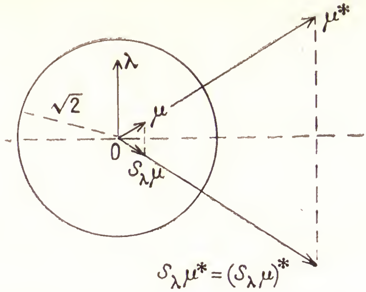


Рис. 3.

Доказательство. 1) Пусть $\alpha, \beta \in \Delta$, и пусть $\beta^* = c\alpha^*$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\alpha = \frac{2\alpha^*}{\langle\alpha^*, \alpha^*\rangle} = c\frac{2c\alpha^*}{\langle c\alpha^*, c\alpha^*\rangle} = c\frac{2\beta^*}{\langle\beta^*, \beta^*\rangle} = c\beta \text{ и } c = \pm 1.$$

Далее, $2\langle\beta^*, \alpha^*\rangle/\langle\alpha^*, \alpha^*\rangle = 2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\beta, \beta\rangle \in \mathbb{Z}$ и $(S_\alpha\beta)^* = S_{\alpha^*}\beta^*$, в силу соотношений (1) и (2).

2), 3) Множество $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_l^*\}$, очевидно, линейно-независимо, и

$$c_{ij}^* = \frac{-2\langle\alpha_i^*, \alpha_j^*\rangle}{\langle\alpha_j^*, \alpha_j^*\rangle} = \frac{-2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle} = c_{ji} \geqslant 0.$$

Следовательно, π^* является π-системой и фундаментальной системой в Δ^*. ▯

Поскольку множество $\pi^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_l^*\}$ линейно-независимо, существуют векторы $\omega_1, \ldots, \omega_l$ из E (называемые *фундаментальными весами*), для которых

$$\langle\omega_i, \alpha_j^*\rangle = \delta_{ij}.$$

Так как π^* — фундаментальная система в Δ^*, то

$$\Lambda = \{\lambda \in E\colon \langle\lambda, \alpha^*\rangle \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha \in \Delta\} = \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_l,$$

так что Λ — свободная абелева группа.

Для $\alpha, \beta \in \Delta$ имеем $\langle\beta, \alpha^*\rangle = 2\langle\beta, \alpha\rangle/\langle\alpha, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$ и, значит, $\Delta \subset \Lambda$. Пусть $\Delta_\mathbb{Z}$ — аддитивная группа, порожденная Δ. Ясно, что $\Delta_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\alpha_1 + \ldots + \mathbb{Z}\alpha_l \subset \Lambda$. Так как множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ линейно-независимо, то $\Delta_\mathbb{Z}$ — подгруппа конечного индекса в Λ. Положим

$$\Lambda^\perp = \Lambda_\mathbb{Z}^* = \{\xi \in E\colon \langle\xi, \lambda\rangle \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \lambda \in \Lambda\} = \mathbb{Z}\alpha_1^* + \ldots + \mathbb{Z}\alpha_l^*,$$

$$\Delta^\perp = \Gamma = \{\xi \in E\colon \langle\xi, \alpha\rangle \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha \in \Delta\} = \mathbb{Z}\varepsilon_1 + \ldots + \mathbb{Z}\varepsilon_l,$$

где $\langle\alpha_i, \varepsilon_j\rangle = \delta_{ij}$. Из этих определений сразу следует, что $\Lambda^\perp$ — подгруппа в Γ.

(5.5.2) $\Lambda/\Delta_Z \cong \Gamma/\Lambda^\perp$.

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{T}$ аддитивную группу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Пусть A и B — аддитивно записываемые абелевы группы. Если существует такое биаддитивное отображение $\varphi\colon A\times B\to\mathbb{T}$, что из условия $\varphi(a, x) = 0$ для всех $x\in B$ следует, что $a = 0$, а из условия $\varphi(y, b) = 0$ для всех $y\in A$ следует, что $b = 0$, то мы говорим, что A и B образуют *ортогональную пару*; если A и B образуют ортогональную пару и группа A к тому же конечна, то $A\cong B$ (см. [Понтрягин]).

Для любых $\lambda\in\Lambda$ и $\gamma\in\Gamma$ положим

$$\lambda\cdot\gamma = \langle\lambda, \gamma\rangle \bmod \mathbb{Z}\in\mathbb{T}.$$

Если $\lambda\equiv\lambda' \bmod \Delta_Z$ и $\gamma\equiv\gamma' \bmod \Lambda^\perp$, то

$$\langle\lambda, \gamma\rangle - \langle\lambda', \gamma'\rangle = \langle\lambda-\lambda', \gamma\rangle + \langle\lambda', \gamma-\gamma'\rangle \equiv 0 \bmod \mathbb{Z}.$$

Мы имеем, таким образом, корректно определенное биаддитивное отображение

$$\varphi\colon \Lambda/\Delta_Z\times\Gamma/\Lambda^\perp \ni (\lambda+\Delta_Z,\ \gamma+\Lambda^\perp)\mapsto\lambda\cdot\gamma\in\mathbb{T}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что группы Λ/Δ_Z и $\Gamma/\Lambda^\perp$ образуют ортогональную пару относительно φ. $\square$

Определение. Конечную группу $\Lambda/\Delta_Z\cong\Gamma/\Lambda^\perp$ мы будем обозначать через $C(\Delta)$ и называть *универсальным центром* системы Δ.

Так как $\langle\alpha_i, \alpha_j^*\rangle = 2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle/\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle = -c_{ij}$, то

$$\alpha_i = -\sum_{j=1}^{l} c_{ij}\omega_j \quad (i = 1, \ldots, l).$$

Как известно, существуют целочисленные $l\times l$-матрицы a и b, для которых $\det a = \pm 1$, $\det b = \pm 1$ и $a(-c_{ij})\,b$ есть диагональная матрица $[e_1, \ldots, e_l]$, где все e_j — натуральные числа, причем e_i делится на e_{i+1} при $i = 1, \ldots, l-1$. Набор из l чисел $(e_1, \ldots, e_l)$ однозначно определяется матрицей $-(c_{ij})$ и называется ее *инвариантом Смита*. Строение группы $\Lambda/\Delta_Z = C(\Delta)$ описывается формулой $C(\Delta)\cong\mathbb{Z}_{e_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{e_l}$, где $\mathbb{Z}_e$ — циклическая группа порядка e.

(5.5.3) *Пусть $(e_1, \ldots, e_l)$ — инвариант Смита матрицы Картана $-(c_{ij})$ системы π. Тогда*

$$C(\Delta) = \mathbb{Z}_{e_1}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{e_l}.$$

Выразим теперь $\omega_1, \ldots, \omega_l$ через $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Предположим, что

$$\omega_i = d_{i1}\alpha_1 + \ldots + d_{il}\alpha_l.$$

Так как $\langle \omega_i, \alpha_j^* \rangle = \delta_{ij}$ и $\langle \alpha_i, \alpha_j^* \rangle = -c_{ij}$, то

$$\langle \omega_i, \alpha_j^* \rangle = \sum_{k=1}^{l} d_{ik} \langle \alpha_k, \alpha_j^* \rangle = \sum_{k=1}^{l} d_{ik} (-c_{kj}) = \delta_{ij}.$$

Следовательно, матрица $d = (d_{ij})$ является обратной к матрице Картана $c = -(c_{ij})$.

(5.5.4) $\omega_i = d_{i1}\alpha_1 + \cdots + d_{il}\alpha_l$,
где (d_{ij}) — *матрица, обратная к матрице Картана* $-(c_{ij})$.

Ниже для каждой неразложимой системы π выписаны: ее матрица Картана $c(\pi)$, определитель этой матрицы $\det c(\pi)$ и обратная матрица $d(\pi) = c(\pi)^{-1}$. Матрицу $c(\pi)$ можно вычислить по диаграмме Дынкина.

A_l
$(l \geqslant 1)$

$\det c(A_l) = l + 1$

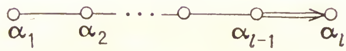
$$c(A_l) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 \ldots 0 & & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d(A_l) = \frac{1}{l-1} \begin{pmatrix} l & l-1 & l-2 & . & . & . & 3 & 2 & 1 \\ l-1 & 2(l-1) & 2(l-2) & . & . & . & 6 & 4 & 2 \\ l-2 & 2(l-2) & 3(l-2) & . & . & . & 9 & 6 & 3 \\ . & . & . & 4(l-3) \ldots & & & . & . & . \\ . & . & . & & \vdots & & . & . & . \\ . & . & . & & \vdots & & . & . & . \\ . & . & . & & \vdots & & . & . & . \\ . & . & . & & & \ldots 4(l-3) & & . & . \\ 3 & 6 & 9 & . & . & . & 3(l-2) & 2(l-2) & l-2 \\ 2 & 4 & 6 & . & . & . & 2(l-2) & 2(l-1) & l-1 \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & l-2 & l-1 & l \end{pmatrix}$$

Например, для $l = 5$

$$c(A_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d(A_5) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & \boxed{9} & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

B_l
$(l \geqslant 2)$

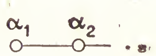


$\det c(B_l) = 2$

$$c(B_l) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & & 2 & -2 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d(B_l) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & \ldots & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & \ldots & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 8 & 8 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2(l-2) & 2(l-1) & 2(l-1) \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & l-2 & l-1 & l \end{array}\right)$$

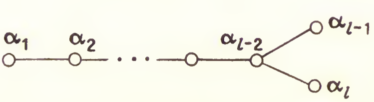
C_l
$(l \geqslant 3)$



$\det c(C_l) = 2$

Матрица $c(C_l)$ транспонирована к $c(B_l)$, а значит $d(C_l)$ транспонирована к $d(B_l)$.

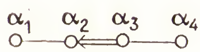
D_l
$(l \geqslant 4)$



$\det c(D_l) = 4$

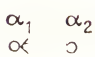
$$c(D_l) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d(D_l) = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{ccccc|c|c} 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 8 & \dots & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & \dots & 12 & 6 & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 16\dots & 16 & 8 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ 4 & 8 & 12 & 16\dots & 4(l-2) & 2(l-2) & 2(l-2) \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8\dots & 2(l-2) & l & l-2 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8\dots & 2(l-2) & l-2 & l \end{array}\right)$$

F_4 

$\det c(F_4) = 1$

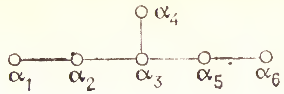
$$c(F_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad d(F_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

G_2 

$\det c(G_2) = 1$

$$c(G_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad d(G_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

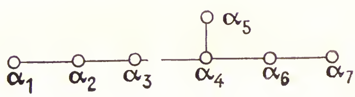
E_6



$\det c(E_6) = 3$

$$c(E_6)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad d(E_6)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 12 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 18 & 9 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 6 & 10 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

E_7

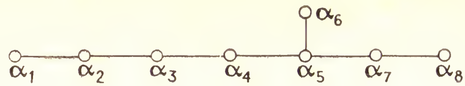


$\det c(E_7) = 2$

$$c(E_7)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d(E_7)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 10 & 12 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 15 & 18 & 9 & 12 & 6 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 12 & 16 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 7 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 8 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

E_8



$\det c\,(E_8) = 1$

$$c(E_8)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d(E_8)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 9 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 12 & 16 & 8 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 15 & 20 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 8 & 10 & 5 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 10 & 14 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Замечание. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и Δ — корневая система алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{g}$. Как мы увидим далее, Λ — это совокупность весов всех представлений алгебры $\mathfrak{g}$, а $C(\Delta)$ — центр универсальной накрывающей группы над $\mathrm{Ad}\,(\mathfrak{g})$.

Упражнение 1. $B_l^* \cong C_l$, $C_l^* \cong B_l$, а для всех остальных неразложимых систем π мы имеем $\pi \cong \pi^*$.

Упражнение 2. Порядок группы $C\,(\Delta)$ равен $\det c\,(\pi)$.

5.6. Аффинная группа Af (Δ) и аффинная группа Вейля Afd(Δ)

Мы знаем, что алгебра $\mathfrak{g}$ является простой тогда и только тогда, когда система Δ неразложима (см. (2.4.7) и упр. 3 § 2.4). Учитывая это, *в оставшейся части глав будем предполагать, что Δ неразложима.*

Для любых $\alpha \in \Delta$ и $k \in \mathbb{Z}$ обозначим через $P_{\alpha, k}$ гиперплоскость в E, определенную линейным уравнением

$$\langle \alpha, \xi \rangle = k,$$

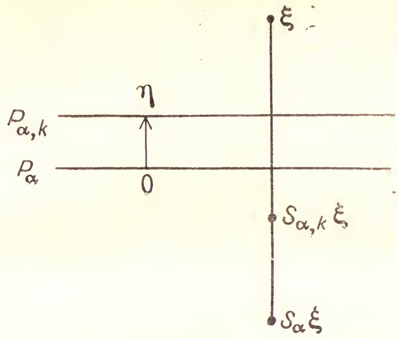


Рис. 4.

и примем обозначение $S_{\alpha,k}$ для отражения пространства E относительно $P_{\alpha,k}$. В наших предыдущих обозначениях, $P_{\alpha,0} = P_\alpha$ и $S_{\alpha,0} = S_\alpha$.

Напомним, что S_α задается формулой

(1) $S_\alpha\xi = \xi - \langle\xi, \alpha^*\rangle\alpha$, где $\alpha^* = 2\alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle$.

Чтобы найти аналогичную формулу для $S_{\alpha,k}$, возьмем точку $\eta \in P_{\alpha,k}$, для которой $\overrightarrow{0\eta} \perp P_{\alpha,k}$ (*рис. 4*). Тогда $\eta = c\alpha$ при некотором $c \in \mathbb{R}$ и $\langle\alpha, \eta\rangle = k$. Следовательно, $c = k/\langle\alpha, \alpha\rangle$. Очевидно,

$$\overrightarrow{(S_\alpha\xi)(S_{\alpha,k}\xi)} = 2\overrightarrow{0\eta} = \frac{2k}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha = k\alpha^*;$$

поэтому

(2) $S_{\alpha,k}\xi = S_\alpha\xi + k\alpha^*$.

Для $\lambda \in E$ обозначим через $T(\lambda)$ преобразование переноса на λ в E: $T(\lambda)\,\xi = \xi + \lambda$ при $\xi \in E$. Для произвольной аддитивной подгруппы D в E положим $T(D) = \{T(\lambda)\colon \lambda \in D\}$. Ясно, что $T(E)$ — это нормальная подгруппа группы эвклидовых движений пространства E, которую можно записать в виде полупрямого произведения $\mathrm{O}(E)\,T(E) = T(E)\,\mathrm{O}(E)$. В этих обозначениях формула (2) принимает следующий вид:

(2′) $S_{\alpha,k} = T(k\alpha^*) \circ S_\alpha$.

Далее мы используем обозначения предыдущего параграфа. Пусть $S \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ и $\gamma \in \Gamma = \Delta^\perp$. Так как $S\Delta = \Delta$, то $S\gamma \in \Gamma$ и, кроме того,

(3) $ST(\gamma)S^{-1} = T(S\gamma)$.

Следовательно, Aut (Δ) нормализует $T(\Gamma)$ и

$$\mathrm{Af}(\Delta) = \mathrm{Aut}(\Delta)\cdot T(\Gamma) = T(\Gamma)\cdot\mathrm{Aut}(\Delta)$$

есть группа эвклидовых движений пространства E. Будем называть $\mathrm{Af}(\Delta)$ *аффинной группой системы* Δ. Очевидно, $\mathrm{Aut}(\Delta) \cap T(\Gamma) = 1$, так что написанное выше произведение является полупрямым.

(5.6.1) *Орбита* $(\mathrm{Af}(\Delta))\,\xi$ *любого элемента* $\xi \in E$ *локально-конечна.*

Доказательство. Множество

$$(\mathrm{Af}(\Delta))\,\xi = \bigcup_{S \in \mathrm{Aut}(\Delta)} T(\Gamma)\,S\xi = \bigcup_{S \in \mathrm{Aut}(\Delta)} \{S\xi + \gamma\colon\ \gamma \in \Gamma\}$$

есть конечное объединение локально-конечных подмножеств пространства E. □

Из формулы (2′) следует, что $S_{\alpha,k} \in T(\Lambda^{\perp})\cdot \mathrm{Ad}(\Delta) \subset \mathrm{Af}(\Delta)$

Определение. Подгруппа в $\mathrm{Af}(\Delta)$, порожденная множеством $\{S_{\alpha,k}\colon\ \alpha \in \Delta,\ k \in \mathbb{Z}\}$, называется *аффинной группой Вейля* системы Δ и обозначается $\mathrm{Afd}(\Delta)$.

(5.6.2) $\mathrm{Afd}(\Delta) = T(\Lambda^{\perp})\cdot \mathrm{Ad}(\Delta)$.

Доказательство. Так как $\mathrm{Ad}(\Delta)\cdot\Lambda = \Lambda$, то $\mathrm{Ad}(\Delta)\,\Lambda^{\perp} = \Lambda^{\perp}$ и потому для любых $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, $\delta \in \Lambda^{\perp}$ □

$$ST(\delta)\,S^{-1} = T(S\delta) \in T(\Lambda^{\perp}).$$

Следовательно, $T(\Lambda^{\perp})\cdot \mathrm{Ad}(\Delta)$ — группа.

Ввиду (2′), $\mathrm{Afd}(\Delta) \subset T(\Lambda^{\perp})\cdot \mathrm{Ad}(\Delta)$. С другой стороны, из соотношений $S_{\alpha,k} = T(k\alpha^*)\circ S_\alpha$ и $S_{\alpha,k}$, $S_\alpha \in \mathrm{Afd}(\Delta)$ следует, что $T(k\alpha^*) \in \mathrm{Afd}(\Delta)$. Поэтому $T(\Lambda^{\perp}) \subset \mathrm{Afd}(\Delta)$. □

Обозначим через $\widehat{\mathscr{P}}$ совокупность всех гиперплоскостей $P_{\alpha,k}$ $(\alpha \in \Delta,\ k \in \mathbb{Z})$. Пусть $\xi \in P_{\alpha,k}$, $\gamma \in \Gamma$ и $S \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Тогда

$$\langle S\xi + \gamma,\ S\alpha\rangle = \langle S\xi,\ S\alpha\rangle + \langle\gamma,\ S\alpha\rangle = \langle\xi,\ \alpha\rangle + \langle\gamma,\ S\alpha\rangle = k + \langle\gamma,\ S\alpha\rangle \in \mathbb{Z}$$

и потому

(4) $\quad (T(\gamma)\circ S)\,P_{\alpha,k} = P_{S\alpha,\,(k+\langle\gamma,\,S\alpha\rangle)}$.

Следовательно, множество $\widehat{\mathscr{P}}$ инвариантно относительно $\mathrm{Af}(\Delta)$. Далее, из формулы (4) следует, что

$$(T(\gamma)\circ S)\,S_{\alpha,k}\,(T(\gamma)\circ S)^{-1} = S_{S\alpha,\,(k+\langle\gamma,\,S\alpha\rangle)}.$$

Таким образом, мы получили следующий результат:

(5.6.3) $\mathrm{Afd}(\Delta)$ — *нормальная подгруппа в* $\mathrm{Af}(\Delta)$.

Объединение $\bigcup_{\alpha\in\Delta,\,k\in\mathbb{Z}} P_{\alpha,k}$ инвариантно относительно $\mathrm{Af}(\Delta)$, и потому тем же свойством обладает его дополнение $E \setminus \bigcup P_{\alpha,k}$.

Определение. Связные компоненты множества $E \setminus \bigcup P_{\alpha,k}$ называются *клетками*. Совокупность всех клеток обозначается через $\mathfrak{C}$.

Пусть $\eta \in E$ и B_r — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в η. Тогда для $\alpha \in \Delta$, $\xi \in B_r$ величина $\langle\alpha, \xi\rangle$ ограничена. Поэтому существует лишь конечное число гиперплоскостей вида $P_{\alpha,k}$, имеющих непустое пересечение с B_r. Значит, множество $B_r \setminus \bigcup P_{\alpha,k}$ открыто и плотно в B_r. Отсюда следует такой результат:

(5.6.4) *Множество* $E \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta,\, k\in\mathbb{Z}} P_{\alpha,k}$ *открыто и плотно в* E.

Пусть $C \in \mathfrak{C}$ и $U \in \mathrm{Af}(\Delta)$. Тогда UC — связная компонента множества $E \setminus \bigcup P_{\alpha,k}$, т. е. UC — клетка. Следовательно, $\mathrm{Af}(\Delta)$ действует как группа преобразований на множестве $\mathfrak{C}$.

Пусть Δ^+ обозначает множество положительных корней из Δ (относительно некоторого фиксированного упорядочения в E). Положим

$$C_0 = \{\xi \in E\colon 0 < \langle\alpha, \xi\rangle < 1 \text{ для всех } \alpha \in \Delta^+\}.$$

Ясно, что C_0 — непустое открытое выпуклое подмножество в $E \setminus \bigcup P_{\alpha,k}$. Так как C_0 связно, то найдется клетка C, для которой $C_0 \subset C$. Если $C_0 \neq C$, то существуют такие $\eta \in C$ и $\alpha \in \Delta$, что $\langle\alpha, \eta\rangle < 0$ или $\langle\alpha, \eta\rangle > 1$. Выберем произвольно $\xi \in C_0$. Пусть $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — какая-нибудь непрерывная кривая в C, соединяющая ξ с η ($\psi(0) = \eta$, $\psi(1) = \xi$). Тогда $\langle\alpha, \psi(t)\rangle$ принимает значение 0 или 1 при некотором t_0, $0 < t_0 < 1$, — противоречие. Значит, C_0 — клетка. Мы будем называть C_0 *фундаментальной клеткой.*

Обозначим старший (по отношению к выбранному упорядочению) корень через $-\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \ldots + m_l\alpha_l$. Ясно, что $-\alpha_0$ есть старший вес присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$, которое неприводимо, либо $\mathfrak{g}$ проста. С другой стороны, как мы увидим в (7.2.1), всякий вес λ неприводимого представления записывается в виде

$$\lambda = \lambda_0 - (k_1\alpha_1 + \ldots + k_l\alpha_l)$$

при некоторых целых неотрицательных k_j, где λ_0 — старший вес представления. Так как каждый корень α_j является весом присоединенного представления и имеет вид $\alpha_j = (-\alpha_0) - (k_1\alpha_1 + \ldots + k_l\alpha_l)$, то $m_j > 0$. Кроме того, для любого положительного корня $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$ выполняются неравенства $0 \leqslant n_j \leqslant m_j$ при $j = 1, 2, \ldots, l$.

(5.6.5) *Пусть* Δ *— неразложимая корневая система,* π *— фундаментальная система в* Δ *и* $-\alpha_0$ *— старший корень. Тогда*

$$-\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \ldots + m_l\alpha_l, \quad m_j > 0,$$

и для любого $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l \in \Delta^+$ *справедливы неравенства* $0 \leqslant n_j \leqslant m_j$ $(j = 1, \ldots, l)$.

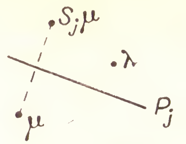


Рис. 5.

В частности, α_0 определяется множеством π (а не упорядочением).

Из (5.6.5) следует, что $\xi \in C_0$ тогда и только тогда, когда

$$0 < \langle \alpha_i, \xi \rangle, \ i = 1, \ldots, l, \text{ и } \langle -\alpha_0, \xi \rangle < 1.$$

Следовательно, C_0 является открытым симплексом, ограниченным $l+1$ гиперплоскостями $P_{\alpha_1, 0}, \ldots, P_{\alpha_l, 0}$ и $P_{-\alpha_0, 1}$.

Для удобства в оставшейся части главы мы примем обозначения:

$$P_{\alpha_1, 0} = P_1, \ \ldots, \ P_{\alpha_l, 0} = P_l, \ P_{-\alpha_0, 1} = P_0,$$

$$S_{\alpha_1, 0} = S_1, \ \ldots, \ S_{\alpha_l, 0} = S_l, \ S_{-\alpha_0, 1} = S_0.$$

(5.6.6) 1) *Множество* $\{S_0, S_1, \ldots, S_l\}$ *порождает* $\mathrm{Afd}(\Delta)$.

2) *Группа* $\mathrm{Afd}(\Delta)$ *действует транзитивно на множестве* $\mathfrak{C}$ *всех клеток.*

Доказательство. Пусть C — клетка. Выберем произвольно $\lambda \in C_0$ и $\nu \in C$. Пусть R — подгруппа в $\mathrm{Afd}(\Delta)$, порожденная множеством $\{S_0, S_1, \ldots, S_l\}$. В силу (5.6.1), множество $R\nu$ локально-конечно. Следовательно, найдется элемент $\mu \in U\nu$, где $U \in R$, для которого $\|\lambda - \mu\| \leqslant \|\lambda - V\mu\|$ при всех $V \in R$. Допустим, что $\mu \notin C_0$. Тогда можно найти граничную гиперплоскость P_j ($j = 0, 1, \ldots, l$) клетки C_0, по отношению к которой λ и μ лежат в разных полупространствах (*рис. 5*). Рассуждая, как при доказательстве (5.2.3), получаем, что $\|S_j\mu - \lambda\| \leqslant \|\mu - \lambda\|$, — противоречие. Таким образом, $\mu \in C_0$ и $UC = C_0$. Это означает, что R действует транзитивно на $\mathfrak{C}$.

Пусть $\alpha \in \Delta$ и $k \in \mathbb{Z}$. Тогда гиперплоскость $P_{\alpha, k}$ ограничивает некоторую клетку C. Выберем преобразование $U \in R$, для которого $UC = C_0$. Тогда $UP_{\alpha, k}$ совпадает с некоторой граничной гиперплоскостью P_j клетки C_0. Следовательно, $US_{\alpha, k}U^{-1}$ совпадает с S_j и $S_j = US_{\alpha, k}U^{-1} \in R$. Значит, $S_{\alpha, k} = U^{-1}S_jU \in R$. □

(5.6.7) *Для любого* $\eta \in E$ *найдется такое преобразование* $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)$, *что* $U\eta \in \bar{C}_0$, *где* $\bar{C}_0$ *— замыкание клетки* C_0:

$$\vec{C}_0 = \{\xi \in E\colon \ 0 \leqslant \langle \alpha_i, \xi \rangle, \ i = 1, \ldots, l, \text{ и } -\langle \alpha_0, \xi \rangle \leqslant 1\}.$$

Доказательство. Пусть r_0 — диаметр клетки C_0. Так как $\mathrm{Afd}(\Delta)$ действует транзитивно на $\mathfrak{C}$, то всякая клетка C из $\mathfrak{C}$ также имеет диаметр r_0. Обозначим через τ' множество всех клеток C, пересекающихся с открытым единичным шаром B_1 с центром η. Ясно, что каждая клетка из τ' содержится в шаре B_{1+r_0} радиуса $1+r_0$ с центром η. Поскольку объем этого шара конечен, τ' содержит лишь конечное множество клеток. Пусть, скажем, $\tau' = \{C_1, \ldots, C_k\}$. Тогда $\eta \in \overline{B}_1 \subset \overline{C}_1 \cup \ldots \cup \overline{C}_k$. Следовательно, найдется такой номер j, что $\overline{C}_j \ni \eta$. Так как существует преобразование $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)$, для которого $UC_j = C_0$, то $U\eta \in U\overline{C}_j = \overline{C}_0$. □

Упражнение 1. Найти вершины фундаментальной клетки C_0 как симплекса.

Упражнение 2. Если система Δ разложима, то множество

$$C_0 = \{\xi \in E\colon 0 < \langle\alpha, \xi\rangle < 1 \text{ для всех } \alpha \in \Delta^+\}$$

является прямым произведением симплексов, но множество

$$C_0' = \{\xi \in E\colon 0 < \langle\alpha_i, \xi\rangle, -\langle\alpha_0, \xi\rangle < 1\}$$

неограниченно.

5.7. Группа $\mathrm{F}(\pi)$ и расширенная диаграмма Дынкина

Мы предполагаем, что система корней Δ неразложима, и сохраняем обозначения предыдущего параграфа.

Рассмотрим подгруппу $F(\pi)$ группы $\mathrm{Af}(\Delta)$, задаваемую формулой

$$F(\pi) = \{U \in \mathrm{Af}(\Delta)\colon UC_0 = C_0\}.$$

Так как $\{P_0, P_1, \ldots, P_l\}$ — совокупность всех граничных гиперплоскостей клетки C_0, то для любого $U \in F$ мы имеем

$$UP_j = P_{\pi(j)},$$

где π — некоторая перестановка множества $\{0, 1, \ldots, l\}$. Положим

$$U\xi = S\xi + \gamma, \quad S \in \mathrm{Aut}(\Delta), \ \gamma \in \Gamma.$$

В силу формулы (4) § 5.6, $UP_{\alpha,k} = P_{S\alpha,(k+\langle\gamma, S\alpha\rangle)}$. Следовательно,

$$(1)\qquad \begin{cases} S\alpha_j = \pm\alpha_{\pi(j)} \text{ для } j = 0, 1, \ldots, k, \\ \langle S\alpha_j, \gamma\rangle = 0, \text{ если } j \neq 0, \ \pi(j) \neq 0. \end{cases}$$

При исследовании преобразования U разберем отдельно два случая.

(i) $\pi(0) = 0$. Ввиду (1), $\langle S\alpha_j, \gamma\rangle = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, l$. Так как $\{S\alpha_1, \ldots, S\alpha_l\}$ — базис в E, то $\gamma = 0$. Поэтому для любого $\xi \in C_0$ мы имеем $\langle S\alpha_j, S\xi\rangle = \langle\alpha_j, \xi\rangle > 0$; поскольку

$S\xi = U\xi \in C_0$, получаем $S\alpha_j > 0$. Таким образом, $S\alpha_j = \alpha_{\pi(j)}$ при $j = 1, \ldots, l$. В этом случае $U = S \in \mathrm{Aut}(\pi)$.

(ii) $\pi(0) = k \neq 0$. Положим $\pi^{-1}(0) = h \neq 0$. Так как $\langle S\alpha_j, \gamma\rangle = 0$, $j = 1, 2, \ldots, \hat{h}, \ldots, l$, то $\langle\alpha_i, \gamma\rangle = 0$ при $i = 1, 2, \ldots \ldots, \hat{k}, \ldots, l$ и потому $\gamma = c\varepsilon_k$, $c \in \mathbb{Z}$, где $\langle\varepsilon_i, \alpha_j\rangle = \delta_{ij}$. Допустим, что $c = 0$, т. е. $\gamma = 0$. Тогда $U = S \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, а поскольку S сохраняет фундаментальную камеру Вейля W_0, заданную неравенством $\langle\alpha_j, \xi\rangle > 0$ при $j = 1, \ldots, l$, то $S \in \mathrm{Aut}(\pi)$. Поэтому $S\alpha_0 = S(-m_1\alpha_1 - \ldots - m_l\alpha_l) = -m_1\alpha_{\pi(1)} - \ldots - m_l\alpha_{\pi(l)} = \alpha_0$, и мы снова имеем случай (i). Следовательно, $c \neq 0$. Для $j = 1, 2, \ldots, \hat{h}, \ldots, l$ и $\xi \in C_0$ получаем

$$\langle S\alpha_j, U\xi\rangle = \langle S\alpha_j, S\xi\rangle + \langle S\alpha_j, \gamma\rangle = \langle\alpha_j, \xi\rangle \pm \langle\alpha_{\pi(j)}, c\varepsilon_k\rangle = \langle\alpha_j, \xi\rangle > 0.$$

Поскольку $U\xi \in C_0$, то $S\alpha_j$ не может совпадать с $-\alpha_{\pi(j)}$. Таким образом,

$$S\alpha_j = \alpha_{\pi(j)}, \quad j \neq 0, \quad j \neq h.$$

Далее, допустим, что $S\alpha_0 = -\alpha_k$. Тогда для любого $\xi \in C_0$

$$\langle\alpha_k, U\xi\rangle = -\langle S\alpha_0, S\xi\rangle + \langle\alpha_k, \gamma\rangle = -\langle\alpha_0, \xi\rangle + c,$$

где $0 < \langle\alpha_k, U\xi\rangle < 1$ и $0 < -\langle\alpha_0, \xi\rangle < 1$. Но это невозможно, так как c — ненулевое целое число. Итак, $S\alpha_0 = \alpha_k$.

Из равенства $-\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \ldots + m_l\alpha_l$ следует теперь, что $-\alpha_k = m_1 S\alpha_1 + \ldots + m_l S\alpha_l$, т. е.

$$-m_h S\alpha_h = \sum_{\substack{j=1, \ldots, \hat{h}, \\ \ldots, l}} m_j \alpha_{\pi(j)} + \alpha_k.$$

Так как правая часть положительна, то $S\alpha_h = \alpha_0$ и

$$m_h(m_1\alpha_1 + \cdots + m_l\alpha_l) = \sum_{\substack{j=1, \ldots, \hat{h}, \\ \ldots, l}} \alpha_{\pi(j)} + \alpha_k.$$

Сравнивая коэффициенты при α_k, получаем $m_h m_k = 1$, т. е. $m_h = m_k = 1$.

Из равенства $S\alpha_0 = \alpha_k$ вытекает, что

$$\langle\alpha_k, U\xi\rangle = \langle\alpha_0, \xi\rangle + c \text{ при } \xi \in C_0.$$

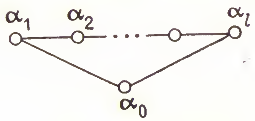
Поскольку $0 < \langle\alpha_k, U\xi\rangle < 1$, $-1 < \langle\alpha_0, \xi\rangle < 0$, единственное возможное значение c есть 1 и, значит, $\gamma = \varepsilon_k$.

Определение. Система $\tilde{\pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ называется *расширенной фундаментальной системой* (содержащей π). Диаграмма, соответствующая $\tilde{\pi}$ (она определяется аналогично диаграмме системы π), называется *расширенной диаграммой Дынкина*.

Пример. A_l: $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Старший корень равен $-\alpha_0 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l$. Все корни имеют одинаковую длину, и можно считать, что $\|\alpha_j\| = 1$ при $j = 0, 1, \ldots, l$. Тогда

$$-2\langle\alpha_0, \alpha_1\rangle = -2\langle\alpha_0, \alpha_l\rangle = 1 \text{ и } \langle\alpha_0, \alpha_j\rangle = 0,$$
$$j = 2, \ldots, l-1.$$

Диаграмма системы $\tilde{\pi}$ такова:



Теперь рассмотрим группу автоморфизмов системы $\tilde{\pi}$:

$$\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) = \{S \in \mathrm{O}(E)\colon S\tilde{\pi} = \tilde{\pi}\}.$$

Из равенств $\langle S\alpha_i, S\alpha_j\rangle/\langle S\alpha_j, S\alpha_j\rangle = \langle\alpha_i, \alpha_j\rangle/\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle$ $(j = 1, \ldots, l)$ следует, что $S\pi$ является π-системой и фундаментальной системой в Δ. Следовательно, в силу (5.2.3), 3), существует преобразование $S' \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, такое что $S\pi = S'\pi$. Поэтому $S'^{-1}S \in \mathrm{Aut}(\pi) \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$ и $S \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Итак, мы показали, что $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$.

Если $S \in \mathrm{Aut}(\pi)$, то $S\alpha_0 = \alpha_0$ и $S \in \mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$. Таким образом, $\mathrm{Aut}(\pi) \subset \mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$.

Зафиксируем полученные выше результаты в виде следующего предложения:

(5.7.1) *Для любого* $U = T(\gamma) \circ S \in F(\pi)$ *имеем* $S \in \mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$. *Если* $S \notin \mathrm{Aut}(\pi)$ *и* $S\alpha_0 = \alpha_k$ $(k \neq 0)$, $S^{-1}\alpha_0 = \alpha_h$, *то* $m_k = m_h = 1$, *где* $-\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \ldots + m_l\alpha_l$.

(5.7.2) *Отображение* $F(\pi) \ni U = T(\gamma) \circ S$ $(\gamma \in \Gamma, S \in \mathrm{Aut}(\Delta)) \longmapsto S \in \mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$ *является изоморфизмом группы* $F(\pi)$ *на* $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$.

Доказательство. (a) Предположим, что $T = T(p_1\varepsilon_1 + \ldots + p_l\varepsilon_l) \in F(\pi)$, где $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{Z}$. Тогда для $\xi \in \mathrm{C}_0$

$$\langle\alpha_j, T\xi\rangle = \langle\alpha_j, \xi\rangle + p_j, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Поскольку $\langle\alpha_j, \xi\rangle$ и $\langle\alpha_j, T\xi\rangle$ принадлежат открытому интервалу $(0, 1)$, из этого равенства следует, что $p_j = 0$. Следовательно, ядро нашего гомоморфизма тривиально.

(b) Докажем, что для каждого преобразования $S \in \mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$ найдется такой элемент $\gamma \in \Gamma$, что $T(\gamma) \circ S \in F(\pi)$. Если $S \in \mathrm{Aut}(\pi)$, то $S \in F(\pi)$ и сделанное утверждение очевидно.

Допустим, что $S\alpha_0 = \alpha_k$ $(k \neq 0)$ и $S\alpha_h = \alpha_0$. Положим $U = T(\varepsilon_k) \circ S$. $\xi \in C_0$ имеем

$$\langle S\alpha_j, U\xi\rangle = \langle S\alpha_j, S\xi\rangle + \langle S\alpha_j, \varepsilon_k\rangle = \langle\alpha_j, \xi\rangle > 0 \quad (j \geqslant 1,\ j \neq h),$$

$$\langle S\alpha_0, U\xi\rangle = \langle S\alpha_0, S\xi\rangle + \langle\alpha_k, \varepsilon_k\rangle = \langle\alpha_0, \xi\rangle + 1 > 0,$$

$$\langle\alpha_0, U\xi\rangle = \langle S\alpha_h, U\xi\rangle = \langle\alpha_h, \xi\rangle + \langle\alpha_0, \varepsilon_k\rangle = \\ = \langle\alpha_h, \xi\rangle - m_k = \langle\alpha_h, \xi\rangle - 1 > -1.$$

Следовательно, $U\xi \in C_0$, т. е. $U \in F(\pi)$. ▯

(5.7.3) $\mathrm{Af}(\Delta) = \mathrm{Afd}(\Delta) \cdot F(\pi)$.

Доказательство. Пусть $U \in \mathrm{Af}(\Delta)$. Положим $UC_0 = C$. Найдется преобразование $V \in \mathrm{Afd}(\Delta)$, для которого $VC = C_0$. Следовательно, $VUC_0 = C_0$, т. е. $VU \in F(\pi)$ и $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)\, F(\pi)$. ▯

Упражнение. Для всякой неразложимой системы π расширенная диаграмма Дынкина связна.

5.8. Доказательство равенства $\mathbf{F}(\pi) \cap \mathbf{Afd}(\Delta) = 1$

Мы сохраняем обозначения предыдущих параграфов.

Пусть C и C' принадлежат τ и $P \in \widehat{\mathscr{P}}$. Если C и C' лежат по одну сторону от P, то мы будем писать $C \sim C' \bmod P$; в противном случае пишем $C \nsim C' \bmod P$. Пусть $\xi \in C$ и $\xi' \in C'$. Ясно, что $C \sim C' \bmod P$ тогда и только тогда, когда отрезок $\overline{\xi\xi'}$ не пересекается с P. Положим $\lambda(C, C') = \{P \in \widehat{\mathscr{P}}\colon C \nsim C' \bmod P\}$. Поскольку отрезок $\overline{\xi\xi'}$ может пересекаться лишь с конечным числом элементов множества $\widehat{\mathscr{P}}$, $\lambda(C, C')$ — конечное множество. Очевидно, $\lambda(C, C') = \lambda(C', C)$ и

$$U\lambda(C, C') = \lambda(UC, UC') \text{ для } U \in \mathrm{Afd}(\Delta).$$

Положим $\lambda(U) = \lambda(UC_0, C_0)$, где C_0 — фундаментальная клетка, и обозначим через $p(U)$ мощность множества $\lambda(U)$: $p(U) = \operatorname{card}\lambda(U)$. Тогда p является функцией на группе $\mathrm{Afd}(\Delta)$ со значениями в $\mathbb{Z}$. Из определения сразу следует, что

$$\lambda(1) = \varnothing,\ \lambda(S_i) = \{P_i\} \quad (i = 0, 1, \ldots, l)$$

(*см. рис. 6*),

(1) $\quad \lambda(U^{-1}) = U^{-1}\lambda U$

и

$$p(1) = 0, \quad p(S_i) = 1, \quad p(U) = p(U^{-1}).$$

(5.8.1) *Для* $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)$ *и* $i = 0, 1, \ldots, l$

$$S_i(\lambda(U) \setminus \{P_i\}) = \lambda(S_iU) \setminus \{P_i\}.$$

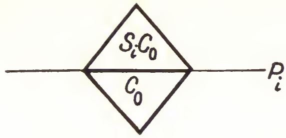


Рис. 6.

Доказательство. Пусть P принадлежит $\lambda(U^{-1}) \setminus \{P_i\}$. Тогда $P \in \lambda(U^{-1}) = U^{-1}\lambda(U)$ (в силу (1)) и $UP \in \lambda(U)$, т. е. $C_0 \not\sim UC_0 \bmod UP$. Далее, поскольку $P \neq P_i$, то $S_iP \neq S_iP_i = P_i$.

Докажем, что $S_iP \in \lambda(S_iU^{-1})$. Из формулы (1) и равенства $S_i^2 = 1$ вытекает, что $\lambda(S_iU^{-1}) = S_iU^{-1}\lambda(US_i)$. Следовательно, достаточно показать, что $UP \in \lambda(US_i)$. Предположим, что это неверно. Тогда $C_0 \sim US_iC_0 \bmod UP$ и, значит, $UC_0 \not\sim US_iC_0 \bmod UP$, откуда следует, что $C_0 \not\sim S_iC_0 \bmod P$, т. е. $P \in \lambda(S_i)$, а это означает, что $P = P_i$. Мы пришли к противоречию. Таким образом,

$$S_i(\lambda(U^{-1}) \setminus \{P_i\}) \subset \lambda(S_iU^{-1}) \setminus \{P_i\}.$$

Заменяя здесь U на US_i, находим, что

$$S_i(\lambda(S_iU^{-1}) \setminus \{P_i\}) \subset \lambda(U^{-1}) \setminus \{P_i\}.$$

Умножая на S_i, получаем

$$\lambda(S_iU^{-1}) \setminus \{P_i\} \subset S_i(\lambda(U^{-1}) \setminus \{P_i\}). \ \square$$

(5.8.2) *Пусть U — элемент группы* $\mathrm{Afd}(\Delta)$. *Тогда P_i принадлежит в точности одному из множеств $\lambda(U^{-1})$ и $\lambda(S_iU^{-1})$; при этом*

$$p(US_i) = \begin{cases} p(U) - 1, & \text{если } P_i \in \lambda(U^{-1}), \\ p(U) + 1, & \text{если } P_i \in \lambda(S_iU^{-1}). \end{cases}$$

Доказательство. (a) Допустим, что $P_i \in \lambda(U^{-1}) \cap \lambda(S_iU^{-1})$. Тогда $U^{-1}C_0 \not\sim C_0 \bmod P_i$ и, значит, $C_0 \not\sim UC_0 \bmod UP_i$. Точно также $S_iU^{-1}C_0 \not\sim C_0 \bmod P_i$, и потому $C_0 \not\sim US_iC_0 \bmod UP_i$. Следовательно, $UC_0 \sim US_iC_0 \bmod UP_i$, т. е. $C_0 \sim S_iC_0 \bmod P_i$, — противоречие.

(b) Если $P_i \notin \lambda(U^{-1}) \cup \lambda(S_iU^{-1})$, то $C_0 \sim U^{-1}C_0$, $S^{-1}UC_0 \sim C_0 \bmod P_i$ и, рассуждая аналогично предыдущему, легко прийти к противоречию.

(c) Если $P_i \notin \lambda(S_iU^{-1})$ и $P_i \in \lambda(U^{-1})$, то, в силу (5.8.1),

$$p(S_iU^{-1}) = \mathrm{card}(\lambda(S_iU^{-1}) \setminus \{P_i\}) = \mathrm{card}(\lambda(U^{-1}) \setminus \{P_i\}) = p(U^{-1}) - 1.$$

Второй случай разбирается аналогично. $\square$

Определим теперь некоторую функцию $q\colon \mathrm{Afd}(\Delta) \to \mathbb{Z}$. Для тождественного преобразования 1 положим $q(1) = 0$. Пусть $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)$ и $U \neq 1$. Тогда U можно записать в виде произведе-

ния $S_{i_1}S_{i_2} \ldots S_{i_r}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_r = 0, 1, \ldots, l$. Минимальное из чисел r (по всевозможным представлениям U в таком виде) называется *длиной* элемента U и обозначается $q(U)$; разложение $U = S_{i_1} \ldots S_{i_r}$, где $r = q(U)$, называется *приведенным выражением* для U.

Очевидно, что $q(S_i) = 1$.

(5.8.3) *$q(U) \geqslant p(U)$ для любого $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)$.*

Доказательство. Пусть $U = S_{i_1} \ldots S_{i_r}$ — приведенное выражение для U. Тогда $p(S_{i_1}) = 1$ и, согласно (5.8.2), $p(S_{i_1}, S_{i_2}) \leqslant p(S_{i_1}) + 1 \leqslant 2, \ldots$, так что $p(U) \leqslant r$. □

(5.8.4) *Если $\mathrm{Afd}(\Delta) \ni U \neq 1$, то $p(U) \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $U = S_{i_1} \ldots S_{i_r}$ — приведенное выражение для U. Положим $U_1 = U = S_{i_1}S_{i_2} \ldots S_{i_r}$, $U_2 = S_{i_2} \ldots S_{i_r}$, $\ldots$, $U_r = S_{i_r}$ (все это — приведенные выражения). Допустим, что $\lambda(U) = \varnothing$. Тогда, в силу (5.8.2), $P_{i_1} \in \lambda(S_{i_1}U)$ и, в силу (5.8.1), $S_{i_1}(\lambda(U) \setminus \{P_{i_1}\}) = \lambda(S_{i_1}U) \setminus \{P_{i_1}\}$, поэтому $\lambda(S_{i_1}U) = \{P_{i_1}\}$, т. е. $\lambda(U_2) = \{P_{i_1}\}$. Докажем индукцией по k утверждение

$$(\mathrm{A}_k) \quad \lambda(U_k) = \{S_{i_{k-1}} \ldots S_{i_2}(P_{i_1}), S_{i_{k-1}} \ldots S_{i_3}(P_{i_2}), \ldots, S_{i_{k-1}}(P_{i_{k-2}}), P_{i_{k-1}}\},$$

$k = 2, \ldots, r$. Предположим, что утверждение (A_k) справедливо. Если $P_{i_k} \notin \lambda(U_k)$, то, ввиду (5.8.2), $P_{i_k} \in \lambda(S_{i_k}U_k) = \lambda(U_{k+1})$ и, согласно (5.8.1),

$$\lambda(U_{k+1}) \setminus \{P_{i_k}\} = S_{i_k}(\lambda(U_k)) \setminus \{P_{i_k}\} = S_{i_k}\lambda(U_k),$$

так что $\lambda(U_{k+1}) = S_{i_k}\lambda(U_k) \cup \{P_{i_k}\}$. Отсюда следует, что справедливо (A_{k+1}). Таким образом, осталось рассмотреть случай $P_{i_k} \in \lambda(U_k)$.

Допустим, что $P_{i_k} \in \lambda(U_k)$. Согласно (A_k), найдется номер m, $2 \leqslant m \leqslant k-1$, для которого

$$P_{i_k} = S_{i_{k-1}} \ldots S_{i_m}(P_{i_{m-1}}),$$

откуда вытекает, что $(S_{i_{k-1}} \ldots S_{i_m}) S_{i_{m-1}} (S_{i_{k-1}} \ldots S_{i_m})^{-1} = S_{i_k}$, т. е. $S_{i_{m-1}}S_{i_m} \ldots S_{i_{k-1}} = S_{i_m} \ldots S_{i_{k-1}}S_{i_k}$. Следовательно,

$$S_{i_1} \ldots S_{i_r} = (S_{i_1} \ldots S_{i_{m-1}})(S_{i_m} \ldots S_{i_k})(S_{i_{k+1}} \ldots S_{i_r})$$

$$= \begin{cases} S_{i_1} \ldots S_{i_{m-2}}S_{i_m} \ldots S_{i_{k-1}}S_{i_{k+1}} \ldots S_{i_n} & \text{при } m > 2, \\ S_{i_2} \ldots S_{i_{k-1}}S_{i_{k+1}} \ldots S_{i_r} & \text{при } m = 2. \end{cases}$$

В обоих случаях мы получаем противоречие с условием $q(U) = r$. Это завершает доказательство утверждения (A_k) для $k = 2, \ldots, r$.

Из (A_r) следует, что

$$\lambda(U_r) = \lambda(S_{i_r}) = \{S_{i_{r-1}} \ldots S_{i_2}(P_{i_1}), \ldots, P_{i_{r-1}}\}.$$

С другой стороны, $\lambda(S_{i_r}) = \{P_{i_r}\}$. Значит, P_{i_r} совпадает с одной из гиперплоскостей $S_{i_{r-1}} \ldots S_{i_m}(P_{i_{m-1}})$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано выше, приходим к противоречию. ▯

(5.8.5) ***Теорема.*** 1) $\mathrm{Afd}(\Delta) \cap F(\pi) = 1$, *так что произведение* $\mathrm{Af}(\Delta) = \mathrm{Afd}(\Delta) \cdot F(\pi)$ *— полупрямое.*

2) $\mathrm{Afd}(\Delta)$ *действует просто транзитивно на* $\mathfrak{C}$.

Доказательство. 1) Если $UC_0 = C_0$ для $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)$, то $p(U) = 0$ и, в силу (5.8.4), $U = 1$.

2) Если $UC_0 = U'C_0$, где $U, U' \in \mathrm{Afd}(\Delta)$, то $U^{-1}U' \in \mathrm{Afd}(\Delta) \cap F(\pi) = 1$ и $U = U'$. ▯

(5.8.6) *Для любого* $U \in \mathrm{Afd}(\Delta)$

1) *если* $U \neq 1$, *то существует номер* i, *такой что* $P_i \in \lambda(U)$;

2) $p(U) = q(U)$.

Доказательство. 1) Пусть $\xi \in C_0$. Если $P_i \notin \lambda(U)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, l$, то отрезок $\xi(U\xi)$ не пересекает ни одной из гиперплоскостей P_i. Следовательно, $U\xi \in C_0$ и, значит, $UC_0 = C_0$. Поэтому $U = 1$.

2) Применим индукцию по $p(U)$. Если $p(U) = 0$, то $U = 1$ и $q(U) = 0$.

Предположим теперь, что $p(U) = k > 0$. Ввиду 1), $\lambda(U^{-1}) \ni P_i$ для некоторого номера i. Положим $V = US_i$. Тогда, согласно (5.8.2), $p(V) = k - 1$, откуда, в силу предположения индукции, $q(V) = k - 1$. Пусть $V = S_{j_1} \ldots S_{j_{k-1}}$ — приведенное выражение для V. Тогда $U = S_{j_1} \ldots S_{j_{k-1}} S_i$ и $q(U) \leqslant k = p(U)$. Учитывая (5.8.3), заключаем, что $p(U) = q(U)$. ▯

5.9. Вычисление универсального центра

Обозначим через φ гомоморфизм

$$\mathrm{Af}(\Delta) \ni T(\gamma) \circ S \mapsto S \in \mathrm{Aut}(\Delta).$$

Тогда $\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\Delta)) = T(\Gamma)\,\mathrm{Ad}(\Delta)$ и

$$\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\Delta))/\mathrm{Afd}(\Delta) = T(\Gamma)\,\mathrm{Ad}(\Delta)/T(\Lambda^{\perp})\,\mathrm{Ad}(\Delta)$$

$$\cong T(\Gamma)/T(\Lambda^{\perp}) \cong \Gamma/\Lambda^{\perp} \cong C(\Delta).$$

С другой стороны, $\mathrm{Af}(\Delta) = \mathrm{Afd}(\Delta)\cdot F(\pi)$ есть разложение в полупрямое произведение и

$$\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\Delta)) = \mathrm{Afd}(\Delta)\cdot(F(\pi) \cap \varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\Delta))).$$

Поэтому

$$C(\Delta) \cong F(\pi) \cap \varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\Delta)).$$

Так как, в силу (5.7.2), отображение φ взаимно-однозначно на $F(\pi)$, то

$$F(\pi) \cap \varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\Delta)) \cong \varphi(F(\pi)) \cap \mathrm{Ad}(\Delta) = \mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) \cap \mathrm{Ad}(\Delta).$$

Следовательно,

$$C(\Delta) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) \cap \mathrm{Ad}(\Delta).$$

Для краткости примем обозначение

$$C(\pi) = \mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) \cap \mathrm{Ad}(\Delta) \cong C(\Delta).$$

Так как разложение $\mathrm{Aut}(\Delta) = \mathrm{Ad}(\Delta)\cdot\mathrm{Aut}(\pi)$ полупрямое и $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) \supset \mathrm{Aut}(\pi)$, то мы имеем следующий результат:

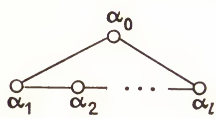
(5.9.1) $C(\pi)$ — *нормальная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$ *и*

$$\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) = C(\pi)\cdot \mathrm{Aut}(\pi), \quad C(\pi) \cap \mathrm{Aut}(\pi) = 1,$$

— *полупрямое произведение.*

Как мы видели в § 5.5, структуру группы $C(\pi) \cong C(\Delta)$ можно вычислить с помощью матрицы Картана. Однако здесь мы будем определять структуру $C(\Delta)$, используя (5.9.1). В большинстве случаев такой путь проще.

A_l $\qquad -\alpha_0 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$



При $l = 1$ имеем $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) = C(\pi) = \{1, (\alpha_0, \alpha_1)\}$. При $l \geqslant 2$ группа $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$, очевидно, порождается перестановками $S_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ и $S_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_l \\ \alpha_l\alpha_{l-1} \ldots \alpha_1 \end{pmatrix}$; S_1 имеет порядок $l+1$, а S_2 — порядок 2, $\mathrm{Aut}(\pi) = \{1, S_2\} \cong \mathbb{Z}_2$ и $\mathrm{card}\,\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) = 2(l+1)$.

Пусть $e_0, e_1, \ldots, e_l$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^{l+1}$. Мы можем принять, что

$$\alpha_i = e_{i-1} - e_i \ (i = 1, \ldots, l), \ \alpha_0 = el - e_0;$$

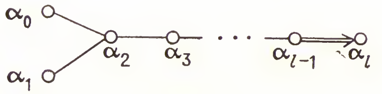
$\mathrm{Ad}(\Delta)$ отождествляется с группой всех перестановок векторов $e_0, e_1, \ldots, e_l$ (преобразования S_{α_i} соответствуют транспозициям и порождают $\mathrm{Ad}(\Delta)$). Поэтому линейное преобразование, определенное условиями

$$Se_0 = e_1, \ Se_1 = e_2, \ \ldots, \ Se_{l-1} = e_l, \ Se_l = e_0,$$

принадлежит $\mathrm{Ad}(\Delta)$ и индуцирует перестановку S_1. Следовательно, $S_1 \in C(\pi)$. Имеем

$$C(\pi) = \{1, S_1, \ldots, S_1^l\} \cong \mathbb{Z}_{l+1} \text{ и } \mathrm{Aut}(\pi) = \{1, S_2\}.$$

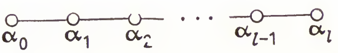
B_l $(l \geqslant 2)$



$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \cdots + \alpha_l)$$

$$\mathrm{Aut}(\pi) = 1, \ \mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) = C(\pi) = \{1, (\alpha_0, \alpha_1)\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

C_l $(l \geqslant 3)$

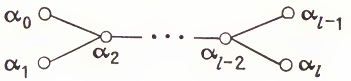


$$-\alpha_0 = 2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$$

$$\mathrm{Aut}(\pi) = 1,$$

$$\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) = C(\pi) = \left\{1, \begin{pmatrix} \alpha_0\alpha_1 & \ldots & \alpha_l \\ \alpha_l\alpha_{l-1} & \ldots & \alpha_0 \end{pmatrix}\right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

D_l $(l \geqslant 4)$



$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{l-2}) + \alpha_{l-1} + \alpha_l$$

Пусть $\mathfrak{S}(k)$ обозначает симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \ldots, k\}$. При $l = 4$ имеем $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) \cong \mathfrak{S}(4)$, а $\mathrm{Aut}(\pi) \cong \mathfrak{S}(3)$. Следовательно, порядок группы $C(\pi)$ равен индексу подгруппы $\mathfrak{S}(3)$ в $\mathfrak{S}(4)$, т. е. $\mathrm{card}\, C(\pi) = 4$. С другой стороны, единственной нормальной подгруппой порядка 4 в $\mathfrak{S}(4)$ является группа Клейна, изоморфная $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Итак, $C(\pi) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

При $l > 4$ группа $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$ порождается подстановками

$$S_1 = (\alpha_0\, \alpha_{l-1}\, \alpha_1\, \alpha_l) \begin{pmatrix} \alpha_2 & \ldots & \alpha_{l-2} \\ \alpha_{l-2} & \ldots & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = (\alpha_{l-1}\, \alpha_l),$$

порядки которых равны соответственно 4 и 2, а $\mathrm{Aut}(\pi) = \{1, S_2\}$ и

$$\mathrm{Aut}(\tilde{\pi}) = \{1, S_1, S_1^2, S_1^3, S_2, S_2S_1 = S_1S_2^3, S_2S_1^2 = S_1S_2^2,$$
$$S_2S_1^3 = S_1S_2\}.$$

Следовательно, $\mathrm{card}\, C(\pi) = 4$. Центр группы $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi})$ совпадает с коммутантом и равен $\{1, S_1^2\}$. Поскольку группа $\mathrm{Aut}(\tilde{\pi})/C(\pi)$ абелева, то $C(\pi) \ni S_1^2 = (\alpha_0, \alpha_1)(\alpha_{l-1}\alpha_l)$. Зафиксировав какой-

нибудь ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_l$ в $\mathbb{R}^l$, мы можем считать, что

$$\Delta = \{\pm e_p \pm e_q \colon p,\ q = 1, \ldots, l,\ p \neq q\},$$

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \ldots,\ \alpha_{l-1} = e_{l-1} - e_l,\ \alpha_l = e_{l-1} + e_l,$$

$$-\alpha_0 = e_1 + e_2.$$

Прямым подсчетом устанавливается, что отражение $S_{e_p - e_q}$ меняет местами e_p и e_q и оставляет на своих местах все прочие e_r, а $S_{e_p+e_q}S_{e_p-e_q}$ умножает e_p и e_q на -1, также оставляя на своих местах все прочие e_r. Следовательно, с помощью преобразований из Ad (Δ) можно получить любую перестановку векторов $\{e_1, \ldots, e_l\}$ и, кроме того, можно умножить любое четное число векторов на -1.

(i) Если 1 нечетно, то отображение

$$e_1 \longmapsto e_l,\ e_2 \longmapsto -e_1,\ e_3 \longmapsto -e_{l-2},\ \ldots,\ e_l \longmapsto -e_1$$

принадлежит Ad (Δ) и индуцирует подстановку S_1. Следовательно,

$$C(\pi) = \{1,\ S_1,\ S_2^2,\ S_1^3\} \cong \mathbb{Z}_4.$$

(ii) Если l четно, то отображение

$$e_1 \longmapsto -e_l,\ e_2 \longmapsto -e_{l-1},\ \ldots,\ e_l \longmapsto -e_1$$

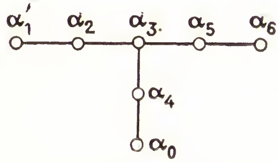
принадлежит Ad (Δ) и соответствует перестановке

$$(\alpha_0\, \alpha_l)(\alpha_1\, \alpha_{l-1})\begin{pmatrix} \alpha_2 & \ldots & \alpha_{l-2} \\ \alpha_{l-2} & \ldots & \alpha_2 \end{pmatrix} = S_1S_2.$$

Следовательно, группа $C(\pi)$ порождена элементами S_1^2 и S_1S_2, а значит,

$$C(\pi) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

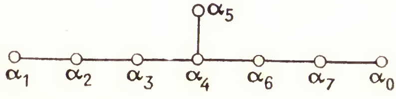
E_6



$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$$

Очевидно, Aut $(\tilde{\pi}) = \mathfrak{S}(3)$ и Aut $(\pi) \cong \mathfrak{S}(2) \cong \mathbb{Z}_2$. Следовательно, $C(\pi)$ — единственная нормальная подгруппа порядка 3, и потому $C(\pi) \cong \mathbb{Z}_3$.

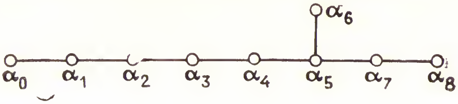
E_7



$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7$$

$\operatorname{Aut}(\pi) = 1$ и $\operatorname{Aut}(\tilde{\pi}) = C(\pi) \cong \mathbb{Z}_2$.

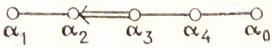
E_8



$$-\alpha_0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8$$

$\operatorname{Aut}(\tilde{\pi}) = 1$.

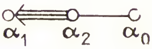
F_4



$$-\alpha_0 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$$

$\operatorname{Aut}(\tilde{\pi}) = 1$.

G_2



$$-\alpha_0 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

$\operatorname{Aut}(\tilde{\pi}) = 1$.

Глава 6

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

В настоящей главе будут в основном рассматриваться замкнутые подгруппы в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, называемые в этой книге *линейными группами*. Мы считаем, что изучение алгебр Ли, во всяком случае в духе этой книги, должно основываться на теории групп Ли или алгебраических групп. Однако недостаток места не позволяет нам развить достаточно полную теорию таких групп. Здесь мы дадим краткий обзор глобальной теории алгебр Ли.

Мы ограничиваемся линейными группами из-за того, что в этом случае можно быстро описать связь между группами и алгебрами Ли, не привлекая в больших дозах теорию многообразий или алгебраическую геометрию. Читатель, знакомый с группами Ли или алгебраическими группами, легко сможет перенести излагаемые ниже факты на более общий случай.

Глобальные аспекты разложения Леви, Картана и Ивасавы из гл. 3 и 4 излагаются здесь элементарным образом и почти независимо от других источников. Правда, в последнем параграфе главы (§ 6.9), где мы даем теорему Г. Вейля о компактных группах Ли, используются некоторые результаты общей теории групп Ли. Однако читатель, знакомый с содержанием книги [Шевалле], без затруднений разберется в материале этого параграфа.

В данной главе нам понадобятся элементы теории многообразий. «Голоморфный» будет у нас означать «вещественно-аналитический», а «$\mathbb{C}$-голоморфный» — «комплексно-аналитический». Мы не смогли в голоморфном случае найти подходящий термин, соответствующий термину «диффеоморфный» в C^∞-случае, и потому используем слово «биголоморфный».

6.1. Линейные группы и их алгебры Ли

Пусть $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ обозначает группу обратимых матриц в в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. Эта группа является связным (см. упр. 3) открытым подмножеством в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{r^2}$ и называется *полной линейной группой* над $\mathbb{C}$. Как мы видели в § 4.4, *экспоненциальное отображение* $\exp: \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ обладает следующими свойствами:

(1) exp *является $\mathbb{C}$-голоморфным отображением и $\mathbb{C}$-биголоморфно отображает некоторую окрестность нуля в* $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$

на соответствующую окрестность единичной матрицы $1 = 1_r$ *в* $GL(r, \mathbb{C})$.

(2) *Если* $[X, Y] = 0$, то $\exp(X + Y) = \exp X \cdot \exp Y$.

(3) *Для любого* $X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ *отображение* $\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto \exp(\lambda X)$ *есть (гладкая) однопараметрическая подгруппа* в $GL(r, \mathbb{C})$, *и, обратно, всякая однопараметрическая подгруппа в* $GL(r, \mathbb{C})$ *может быть получена таким образом.*

Добавим к этому еще несколько формул: для $X, Y \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$

(4) $$\lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{X}{m}\cdot\exp\frac{Y}{m}\right)^m = \exp(X+Y),$$

(5) $$\lim_{m\to\infty}\left(\exp\frac{X}{m}\cdot\exp\frac{Y}{m}\cdot\exp\frac{-X}{m}\cdot\exp\frac{-Y}{m}\right)^{m^2} = \exp[X, Y],$$

(6) $$\exp X\cdot Y\cdot\exp(-X) = \exp(\operatorname{ad} X)\cdot Y.$$

Доказательство. В силу (1), для достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементы $f_1, f_2, \ldots, \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, что ряд

$$f(\lambda) = f_1\lambda + f_2\lambda^2 + \ldots$$

сходится при $|\lambda| < \varepsilon$ и

$$\exp(\lambda X)\cdot\exp(\lambda Y) = \exp f(\lambda).$$

Сравнивая тейлоровские разложения

$$\exp(\lambda X)\cdot\exp(\lambda Y) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}X^i\lambda^i\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}Y^j\lambda^j$$

$$= 1 + (X+Y)\lambda + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2)\lambda^2 + \cdots$$

и

$$\exp f(\lambda) = 1 + f_1\lambda + \left(f_2 + \frac{1}{2}(f_1)^2\right)\lambda^2 + \cdots,$$

получаем $f_1 = X + Y$, $f_2 = \frac{1}{2}[X, Y]$, т. е.

(7) $$\exp(\lambda X)\cdot\exp(\lambda Y) = \exp\left(\lambda(X+Y) + \frac{\lambda^2}{2}[X, Y] + \cdots\right).$$

Для всякого вещественного числа a пусть $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a. Поскольку $(\exp Z)^k = \exp(kZ)$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $Z \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, мы имеем $(\exp f(\lambda))^{[1/\lambda]} = \exp[1/\lambda]f(\lambda)$ при $0 < \lambda < \varepsilon$, и $\lim\limits_{\lambda\to 0}[1/\lambda]f(\lambda) = f_1 = X + Y$. Тем самым мы доказали (4).

Рассуждая аналогично, из равенства

$$\exp(\lambda X)\cdot\exp(\lambda Y)\cdot\exp(-\lambda X)\cdot\exp(-\lambda Y)$$
$$=\left(1+(X+Y)\lambda+\frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2)\lambda^2+\cdots\right)$$
$$\cdot\left(1-(X+Y)\lambda+\frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2)\lambda^2+\cdots\right)$$

получаем равенство

$$\exp(\lambda X)\cdot\exp(\lambda Y)\cdot\exp(-\lambda X)\cdot\exp(-\lambda Y)=\exp([X, Y]\lambda^2+\cdots)$$

и формулу (6).

Наконец, поскольку (см. доказательство (1.3.2))

$$(\operatorname{ad} X)^k Y=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}X^{k-i}YX^i=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{X^{k-i}}{(k-i)!}Y\frac{(-X)^i}{i!},$$

мы имеем

$$\exp(\operatorname{ad} X)\cdot Y=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\frac{X^j}{j!}Y\frac{(-X)^i}{i!}=\exp X\cdot Y\cdot\exp(-X).\ \square$$

Пусть G — замкнутая подгруппа (= замкнутое подмножество и подгруппа) в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Положим

$$\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})\colon \exp(\mathbb{R}X)\subset G\}.$$

Ясно, что из $X\in\mathfrak{g}$ следует $\mathbb{R}X\subset\mathfrak{g}$. Далее, в силу (4) и (5), для любых $X, Y\in\mathfrak{g}$

$$X+Y\in\mathfrak{g}\ \text{и}\ [X, Y]\in\mathfrak{g}.$$

Следовательно, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Мы назовем $\mathfrak{g}$ *алгеброй Ли группы* G. Алгеброй Ли группы $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ является $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. Имея в виду изучить экспоненциальное отображение группы G, т. е. отображение $\exp\colon\mathfrak{g}\to G$, докажем сначала следующую лемму:

(6.1.1) *Обозначим через D замкнутый единичный круг в $\mathbb{R}^m$: $D=\{v\in\mathbb{R}^m\colon\|v\|\leqslant 1\}$. Пусть Q — подмножество в D, обладающее такими свойствами:*

(i) *Q замкнуто;*

(ii) *$\mathbb{Z}v\cap D\subset Q$ для любого $v\in Q$;*

(iii) *Q содержит последовательность $v_1, v_2, \ldots$, все элементы которой отличны от нуля, с $\lim v_j=0$.*

Тогда существует элемент v_0, такой что $\|v_0\|=1$ и

$$\lambda v_0\in Q\ \textit{при}\ -1\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Доказательство. Положим $k_j=[1/\|v_j\|]$ для $j=1, 2, \ldots$ Тогда $k_jv_j\in Q$ и $\lim\|k_jv_j\|=1$. Поскольку все k_jv_j принадлежат D,

можно выделить из $\{k_j v_j\}$ сходящуюся подпоследовательность. Не меняя обозначений, будем считать, что $\lim k_j v_j = v_0$. Тогда $\|v_0\| = 1$ и $v_0 \in Q$. Пусть λ принадлежит замкнутому интервалу $[0, 1]$. Так как $\lim v_j = 0$ и $\lim v_j/\|v_j\| = v_0$, то

$$\lim [\lambda/\|v_j\|] v_j = \lambda \lim v_j/\|v_j\| - \lim (\lambda/\|v_j\| - [\lambda/\|v_j\|]) v_j = \lambda v_0.$$

Следовательно, $\lambda v_0 \in Q$ и $-\lambda v_0 \in Q$. □

Определение. Пусть M и N — голоморфные многообразия, такие что $N \subset M$ (как множества). Говорят, что N является *подмногообразием* в M, если

a) отображение включения ι: $N \to M$ голоморфно;

b) для каждой точки $p \in N$ справедливо равенство $\operatorname{rank}\,(d\iota)_p = \dim N$, где $(d\iota)_p$ — инфинитезимальное линейное отображение в точке p, соответствующее отображению ι.

Если к тому же выполнено условие

c) топология многообразия N совпадает с относительной топологией N как подмножества в M,

то говорят, что N *регулярно вложено* в M.

Условие того, что данное подмножество N многообразия M является регулярно вложенным подмногообразием, дается следующим предложением:

(6.1.2) *Пусть M — голоморфное многообразие размерности m, r — натуральное число, $1 \leqslant r \leqslant m$, и N — подмножество в M. Если для каждой точки $p \in N$ существует локальная система координат $\{x_1, \ldots, x_m\}$ на многообразии M, определенная в некоторой окрестности U этой точки, такая что*

$$N \cap U = \{q \in U\colon\ x_{r+1}(q) = \cdots = x_m(q) = 0\},$$

то N обладает единственной структурой голоморфного многообразия, относительно которой N становится регулярно вложенным подмногообразием, и обратно.

(Стандартное доказательство этого результата мы предоставим читателю.)

Следующая теорема представляет собой частный случай теоремы, принадлежащей Э. Картану:

(6.1.3) *Пусть G — замкнутая подгруппа в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. *Тогда*

1) $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})\colon \exp(\mathbb{R}X) \subset G\}$ *есть алгебра Ли над* $\mathbb{R}$;

2) *G является регулярно вложенным подмногообразием в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$;

3) $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ *представляет собой голоморфное отображение, биголоморфное в некоторой окрестности нуля в* $\mathfrak{g}$; *в частности,* $\dim G = \dim \mathfrak{g}$;

4) *отображение* $G \times G \ni (a, b) \mapsto ab^{-1} \in G$ *голоморфно.*

Доказательство. Выберем векторное подпространство $\mathfrak{p}$ над $\mathbb{R}$ в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, такое что $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) = \mathfrak{g} + \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p} = 0$. Определим отображение ψ: $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ формулой

$$\psi(X + Y) = \exp X \cdot \exp Y \quad (X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{p}).$$

Так как

$$\psi(X+Y) = 1 + (X+Y) + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + \cdots,$$

то отображение $(d\psi)_0$ невырожденно, и можно найти такую окрестность $\mathfrak{g}_0$ нуля в $\mathfrak{g}$ и такую окрестность $\mathfrak{p}_0$ нуля в $\mathfrak{p}$, что ψ биголоморфно в $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{p}_0 = \{X + Y\colon X \in \mathfrak{g}_0, Y \in \mathfrak{p}_0\}$.

Мы утверждаем, что существует окрестность U точки 1 в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, содержащаяся в $\exp(\mathfrak{g}_0) \cdot \exp(\mathfrak{p}_0)$, для которой $U \cap G \subset \exp(\mathfrak{g}_0)$. Действительно, допустим, что это неверно. Тогда найдется такая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ в G, что

$$a_j = \exp X_j \cdot \exp Y_j,\quad X_j \in \mathfrak{g}_0,\quad 0 \neq Y_j \in \mathfrak{p}_0,$$

и

$$\lim a_j = 1.$$

Поскольку $\exp X_j \in G$, то $\exp Y_j = \exp(-X_j) \cdot a_j \in G$. Мы можем предполагать, что $\mathfrak{p}_0 = D$, где D — замкнутый единичный круг относительно подходящего базиса в $\mathfrak{p}$. Положим $Q = \{Y \in \mathfrak{p}_0\colon \exp Y \in G\}$. Тогда условия предложения (6.1.1) выполнены для $Q \subset D$. Следовательно, существует ненулевой элемент $Y_0 \in Q$, для которого $\lambda Y_0 \in Q$ при $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Поскольку множество $\{\exp(\lambda Y_0)\colon -1 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ порождает $\exp(\mathbb{R} Y_0)$, мы имеем $\exp(\mathbb{R} Y_0) \subset G$ и $Y_0 \in \mathfrak{g}$ — противоречие. Значит, существует окрестность U точки 1, такая что $U \cap G \subset \exp(\mathfrak{g}_0)$. Мы можем теперь, не меняя обозначений, считать, что

$$G \cap (\exp(\mathfrak{g}_0) \cdot \exp(\mathfrak{p}_0)) = \exp(\mathfrak{g}_0).$$

Пусть a принадлежит G. Тогда $a \exp(\mathfrak{g}_0) \exp(\mathfrak{p}_0) = V$ есть окрестность точки a в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ и $V \cap G = a \exp(\mathfrak{g}_0)$. Отображение $V \ni a \cdot \exp X \cdot \exp Y \to (X, Y) \in \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{p}_0$ определяет локальную систему координат в V, и $V \cap G$ задается условием $Y = 0$. Согласно (6.1.2), G является регулярно вложенным подмногообразием в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Наконец, отображение $G \times G \ni (a, b) \to ab^{-1} \in G$ голоморфно в силу того, что оно голоморфно на $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. $\square$

Под *линейной группой* мы всюду в этой книге будем понимать замкнутую подгруппу в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Линейную группу $G \subset \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ будем называть *комплексной*, если она является $\mathbb{C}$-голоморфным подмногообразием в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

(6.1.4) *Пусть G — линейная группа (в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$) и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Для того чтобы группа G была комплексной, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{g}$ была подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{g}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$, то G, очевидно, комплексна. Обратно, предположим, что G — комплексная линейная группа и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Как можно доказать, для $\mathbb{C}$-голоморфных многообразий и $\mathbb{C}$-голоморфных подмногообразий справедлива теорема, аналогичная (6.1.2). Поэтому существуют окрестность U точки 1 в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ и комплексная локальная система координат $\{x_1, \ldots, x_{r^2}\}$, определенная на U, для которых

$$G \cap U = \{q \in U\colon\ x_1(q) = \cdots = x_k(q) = 0\}.$$

Пусть X принадлежит $\mathfrak{g}$. Тогда найдется такое положительное число ε, что $x_i(\exp \lambda X) = 0$ при $-\varepsilon < \lambda < \varepsilon$. Поскольку $x_i(\exp(\lambda X))$ является $\mathbb{C}$-голоморфной функцией от λ, мы имеем $x_i(\exp(\mu X)) = 0$ для всех комплексных чисел μ с $|\mu| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mathbb{C}X \subset \mathfrak{g}$. ▯

Группа G называется (*комплексной*) *группой Ли*, если она представляет собой ($\mathbb{C}$-) голоморфное многообразие и отображение $G \times G \ni (a, b) \to ab^{-1} \in G$ является ($\mathbb{C}$-) голоморфным. Всякая (комплексная) линейная группа есть (комплексная) группа Ли. Пусть G_0 — *компонента единицы* (связная компонента, содержащая единицу) группы Ли G. Очевидно, G_0 является открытой и замкнутой нормальной подгруппой в G.

(6.1.5) *Пусть G — линейная группа, а $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда* $\exp(\mathfrak{g})$ *порождает компоненту единицы G_0 группы G.*

Доказательство. Пусть G_1 обозначает подгруппу в G, порожденную $\exp(\mathfrak{g})$. Ясно, что G_1 связна. Далее, поскольку $\exp(\mathfrak{g})$ содержит некоторое открытое подмножество в G, множество $a \cdot \exp(\mathfrak{g}) \subset G_1$ при любом $a \in G_1$ содержит некоторую окрестность элемента a. Следовательно, G_1 открыта. Отсюда вытекает, что каждый класс смежности в G_1 — открытое множество, а $G_1 = G \setminus \bigcup_{b \notin G_1}$ в G_1 — замкнутое. Поэтому G_1 является компонентой единицы. ▯

(6.1.6) *Пусть G — связная линейная группа и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Группа G является абелевой тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{g}$ абелева. В этом случае экспоненциальное отображение сюръективно* и *$G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^h$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Если алгебра $\mathfrak{g}$ абелева, то из формулы

(8) $\quad \exp X \cdot \exp Y = \exp(X + Y) \quad$ при $X, Y \in \mathfrak{g}$

следует, что $\exp(\mathfrak{g})$ — группа, т. е. $\exp(\mathfrak{g}) = G$, и группа G абелева.

Обратно, если группа G абелева, то для X, $Y \in \mathfrak{g}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем ввиду (5)

$$1 = \left(\exp \frac{\lambda X}{m} \cdot \exp \frac{Y}{m} \cdot \exp \frac{-\lambda X}{m} \cdot \exp \frac{-Y}{m}\right)^{m^2} = \exp \lambda [X, Y]$$

и $[X, Y] = 0$.

Далее, из (8) вытекает, что отображение exp является непрерывным гомоморфизмом аддитивной группы $\mathfrak{g}$ на G. Пусть D — ядро этого гомоморфизма. Существует такая окрестность $\mathfrak{g}_0$ точки 0 в $\mathfrak{g}$, что $D \cap \mathfrak{g}_0 = 0$. Следовательно, D — дискретная подгруппа, порожденная множеством $\{X_1, \ldots, X_h\}$, которое линейно-независимо, и группа $\mathfrak{g}/D$ изоморфна G. ▯

Замечание. Экспоненциальное отображение переводит $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ в GL $(r, \mathbb{R})$, и большинство из полученных в настоящем параграфе результатов переносится на этот случай.

Пусть V — векторное пространство размерности r над $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда группу GL $(V) = \{s \in \mathfrak{gl}(V)\colon \det s \neq 0\}$ можно отождествить с GL (r, P), выбрав произвольный базис в V. Следовательно, мы можем естественным образом определить линейные группы в GL (V) и их алгебры Ли.

Упражнение 1. Пусть G_1 и G_2 — линейные группы в GL (r, $\mathbb{C}$) с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ соответственно. Тогда алгеброй Ли группы $G_1 \cap G_2$ будет $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2$.

Упражнение 2. Существует такая окрестность W точки 1 в GL $(r, \mathbb{C})$, что ряд

$$\ln a = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{(a-1)^j}{j}$$

абсолютно сходится (т. е. каждая компонента этого матричного ряда абсолютно сходится) для всякого $a \in W$. При этом

$$\exp(\ln a) = a \ (a \in W),$$

$$\ln(\exp X) = X \ (X \in \ln W).$$

[*Указание*: достаточно, чтобы выполнялись неравенства $|a_{ij} - \delta_{ij}| < 1/r^2$ при $i, j = 1, \ldots, r$.]

Упражнение 3. Отображение exp: $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \to$ GL $(r, \mathbb{C})$ сюръективно, а потому группа GL $(r, \mathbb{C})$ связна. [*Указание*. Используя жорданову нормальную форму, свести задачу к рассмотрению эндоморфизма вида $\xi 1 + N \in$ GL $(r, \mathbb{C})$, где $0 \neq \xi \in \mathbb{C}$ и эндоморфизм N нильпотентен. Затем с помощью формулы $\xi 1 + N = \xi (1 + N/\xi)$ свести ее к случаю унипотентного эндоморфизма.]

6.2. Классические линейные группы и алгебраические группы

Пусть $\varphi(v, w) = {}^t v \varphi w$ — билинейная форма на $\mathbb{C}^r$, где $\varphi \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, а $v, w \in \mathbb{C}^r$ рассматриваются как векторы-столбцы. Тогда

$$L(\varphi) = \{a \in \text{GL}(r, \mathbb{C})\colon \varphi(av, aw) = \varphi(v, w)\}$$
$$= \{a \in \text{GL}(r, \mathbb{C})\colon {}^t a \varphi a = \varphi\}$$

— линейная группа. Действительно, для любых a, $b \in L(\varphi)$ имеем ${}^t(ab^{-1})\,\varphi\,(ab^{-1}) = {}^t(b^{-1})\,({}^ta\varphi a)\,b^{-1} = \varphi$, так что $ab^{-1} \in L(\varphi)$; то что группа $L(\varphi)$ замкнута, очевидно.

Найдем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы $L(\varphi)$. Для любого $X \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\lambda^t X)\cdot\varphi\cdot\exp(\lambda X) = \varphi \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Беря производную по λ при $\lambda = 0$, получаем ${}^tX\varphi + \varphi X = 0$, т. е. $X \in \mathfrak{l}(\varphi)$, в обозначениях § 2.7. С другой стороны, если ${}^tX\varphi + \varphi X = 0$, то при $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\exp(\lambda^t X)\,\varphi = \sum \frac{\lambda^i}{i!}({}^tX)^i\varphi = \sum \frac{\lambda^i}{i!}\varphi(-X)^i = \\ = \varphi\cdot\exp(-\lambda X)$$

и $\exp(\lambda X) \in L(\varphi)$, т. е. $\mathfrak{l}(\varphi) \subset \mathfrak{g}$. Следовательно, $\mathfrak{l}(\varphi) = \mathfrak{g}$. Поскольку $\mathbb{C}\mathfrak{l}(\varphi) = \mathfrak{l}(\varphi)$, линейная группа $L(\varphi)$ комплексна.

Далее, для $\varphi \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ мы имеем билинейную форму $\varphi^{\mathbb{R}}(v, w) = {}^tv\varphi w$ $(v, w \in \mathbb{R}^r)$; тогда

$$L(\varphi^{\mathbb{R}}) = L(\varphi) \cap GL(r, \mathbb{R}) = \{a \in GL(r, \mathbb{R})\colon {}^ta\varphi a = \varphi\}$$

есть замкнутая подгруппа в $GL(r, \mathbb{R})$, имеющая алгебру Ли

$$\mathfrak{l}(\varphi^{\mathbb{R}}) = \mathfrak{l}(\varphi) \cap \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})\colon {}^tX\varphi + \varphi X = 0\}.$$

Будем называть отображение $\psi\colon \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ *полуторалинейной формой*, если

$$\psi(\alpha v + v', w) = \bar{\alpha}\psi(v, w) + \psi(v', w),$$
$$\psi(v, \alpha w + w') = \alpha\psi(v, w) + \psi(v, w')$$

для любых $v, v', w, w' \in \mathbb{C}^r$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, где $\bar{\alpha}$ обозначает число, комплексно-сопряженное к α. В этом случае можно найти матрицу $\varphi \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, такую что

$$\psi(v, w) = {}^t\bar{v}\varphi w.$$

Мы будем обозначать ψ через $\varphi^{\#}$:

$$\varphi^{\#}(v, w) = {}^t\bar{v}\varphi w.$$

Как и в случае билинейных форм, легко проверяется, что

$$L(\varphi^{\#}) = \{a \in GL(r, \mathbb{C})\colon \varphi^{\#}(av, aw) = \varphi^{\#}(v, w)\} \\ = \{a \in GL(r, \mathbb{C})\colon {}^t\bar{a}\varphi a = \varphi\}$$

является (не обязательно комплексной) линейной группой и ее алгеброй Ли служит

$$\mathfrak{l}(\varphi^{\#}) = \{X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})\colon {}^t\bar{X}\varphi + \varphi X = 0\}.$$

Таким образом, мы получили следующий результат:

(6.2.1) 1) *Пусть* φ — *билинейная или полуторалинейная форма на* $\mathbb{C}^r$. *Тогда*

$$\mathrm{L}(\varphi) = \{a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \colon \varphi(av, aw) = \varphi(v, w)\}$$

есть линейная группа, алгеброй Ли которой является

$$\mathfrak{l}(\varphi) = \{X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \colon \varphi(Xv, w) + \varphi(v, Xw) = 0\}.$$

В том случае, когда φ *билинейна, группа* $\mathrm{L}(\varphi)$ *комплексна.*

2) *Пусть* $\varphi \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ *и* $\varphi^{\mathbb{R}}$ — *соответствующая билинейная форма на* $\mathbb{R}^r$. *Тогда*

$$\mathrm{L}(\varphi^{\mathbb{R}}) = \{a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) \colon \varphi^{\mathbb{R}}(av, aw) = \varphi^{\mathbb{R}}(v, w)\}$$
$$= \mathrm{L}(\varphi) \cap \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$$

— *линейная группа, имеющая своей алгеброй Ли*

$$\mathfrak{l}(\varphi^{\mathbb{R}}) = \{X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}) \colon \varphi^{\mathbb{R}}(Xv, w) + \varphi^{\mathbb{R}}(v, Xw) = 0\}$$
$$= \mathfrak{l}(\varphi) \cap \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}).$$

Используя (6.2.1), мы можем построить несколько линейных групп и их алгебр Ли.

(a) Билинейные формы на $\mathbb{C}^r$. Группа

$$\mathrm{O}(r, \mathbb{C}) = \mathrm{L}(1_r) = \{a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \colon {}^t a a = 1\}$$

называется *комплексной ортогональной группой*; ее алгеброй Ли является

$$\mathfrak{o}(r, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})\} \colon {}^t X + X = 0\}.$$

Группа

$$\mathrm{Sp}(r, \mathbb{C}) = \mathrm{L}(J_r), \quad \text{где } J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1_r \\ -1_r & 0 \end{pmatrix},$$

называется *комплексной симплектической группой*; ее алгеброй Ли служит $\mathfrak{sp}(r, \mathbb{C})$ (см. § 2.7).

Как $\mathrm{O}(r, \mathbb{C})$, так и $\mathrm{Sp}(r, \mathbb{C})$ — комплексные линейные группы.

(b) Полуторалинейные формы. Группа

$$\mathrm{U}(r) = \mathrm{L}(1_r^{\#}) = \{a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \colon {}^t \bar{a} a = 1\}$$

называется *унитарной группой*. Для $a = (a_{ij}) \in \mathrm{U}(r)$ имеем $\sum_{i=1}^{r} |a_{ij}|^2 = 1$ при $j = 1, \ldots, r$, так что $\mathrm{U}(r)$ — компактная группа. Алгебра Ли группы $\mathrm{U}(r)$ — это алгебра

$$\mathfrak{u}(r) = \{X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) \colon {}^t\overline{X} + X = 0\}.$$

(c) Билинейные формы на $\mathbb{R}^r$. Группа

$$\mathrm{O}(r)=\mathrm{O}(r,\ \mathbb{R})=\mathrm{L}\left(1_r^{\mathbb{R}}\right)=\{a\in\mathrm{GL}(r,\ \mathbb{R}):\ {}^t aa=1\}$$

называется (*вещественной*) *ортогональной группой*. Поскольку $\mathrm{O}(r)=\mathrm{O}(r,\ \mathbb{C})\cap\mathrm{U}(r)\subset\mathrm{U}(r)$, ортогональная группа компактна. Алгеброй Ли группы $\mathrm{O}(r)$ служит

$$\mathfrak{o}(r)=\mathfrak{o}(r,\ \mathbb{R})=\mathfrak{l}\left(1_r^{\mathbb{R}}\right)=\{X\in\mathfrak{gl}(r,\ \mathbb{R}):\ {}^tX+X=0\}.$$

Группа

$$\mathrm{Sp}(r,\ \mathbb{R})=\mathrm{L}\left(J_r^{\mathbb{R}}\right)$$

называется *вещественной симплектической группой*

Теперь найдем алгебру Ли *комплексной специальной линейной группы*

$$\mathrm{SL}(r,\ \mathbb{C})=\{a\in\mathrm{GL}(r,\ \mathbb{C}):\ \det\ a=1\}.$$

Ввиду формулы

$$\det(\exp X)=\exp(\operatorname{tr} X)$$

(упр. 1 § 4.4) ясно, что она совпадает с $\mathfrak{sl}(r,\ \mathbb{C})$. В частности, группа $\mathrm{SL}(r,\ \mathbb{C})$ комплексна.

Приведем еще несколько примеров линейных групп:

$\mathrm{SU}(r)=\mathrm{SL}(r,\ \mathbb{C})\cap\mathrm{U}(r)$ — *специальная унитарная группа*,

$\mathrm{SO}(r,\ \mathbb{C})=\mathrm{SL}(r,\ \mathbb{C})\cap\mathrm{O}(r,\ \mathbb{C})$ — *комплексная специальная ортогональная группа*,

$\mathrm{SO}(r)=\mathrm{SL}(r,\ \mathbb{R})\cap\mathrm{O}(r)$ — *специальная ортогональная группа*,

$\mathrm{Sp}(r)=\mathrm{U}(2r)\cap\mathrm{Sp}(r,\ \mathbb{C})$ — *унитарная симплектическая группа*,

$$\mathrm{SO}(p,\ q)=\left\{a\in\mathrm{SL}(r,\ \mathbb{R}):\ {}^ta\begin{pmatrix}-1_p & 0\\ 0 & 1_q\end{pmatrix}a=\begin{pmatrix}-1_p & 0\\ 0 & 1_q\end{pmatrix}\right\}$$ — *индефинитная ортогональная группа*.

Их алгебры Ли находятся без труда (см. упр. 2).

Обратимся теперь к несколько иному классу линейных групп.

Определение. Пусть P есть $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Подгруппа G в $\mathrm{GL}(r,\ P)$ называется *алгебраической*, если существует множество многочленов $\{f_\alpha\}\subset P\,[x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{rr}]$, такое что $a=(a_{ij})\in\mathrm{GL}(r,\ P)$ принадлежит G тогда и только тогда, когда $f_\alpha(\ldots,\ a_{ij},\ \ldots)=0$ для всех α.

Всякая алгебраическая группа является линейной группой. В частности,

(6.2.2) *Всякая алгебраическая группа в* GL $(r, \mathbb{C})$ *является комплексной линейной группой.*

Доказательство. Пусть G — алгебраическая группа в GL $(r, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Пусть X принадлежит $\mathfrak{g}$. Для $\mu \in \mathbb{C}$ пусть $\xi_{ij}(\mu)$ означает (i, j)-ю компоненту матрицы $\exp(\mu X)$. Тогда $\xi_{ij}(\mu)$ является $\mathbb{C}$-голоморфной функцией и, значит, $\mathbb{C}$-голоморфными будут также функции

$$\tilde{f}_\alpha(\mu) = f_\alpha(\ldots, \xi_{ij}(\mu), \ldots).$$

Так как $\tilde{f}_\alpha(\mu) = 0$ при $\mu \in \mathbb{R}$, то $\tilde{f}_\alpha$ тождественно равно нулю. Следовательно, $\mathbb{C}X \subset \mathfrak{g}$. $\square$

Для любой билинейной формы φ на $\mathbb{C}^r$ или $\mathbb{R}^r$ группа L (φ) является алгебраической группой.

Пусть V — векторное пространство размерности r над P $(= \mathbb{C}$ или $\mathbb{R})$. Подгруппа G группы GL $(V) = \{s \in \mathfrak{gl}(V) \colon \det s \neq 0\}$ называется *алгебраической*, если она представляется алгебраической группой матриц (т. е. алгебраической группой в GL $(r, \mathbb{C})$) относительно некоторого базиса в V. Очевидно, свойство быть алгебраической группой не зависит от выбора базиса.

(6.2.3) *Для всякой алгебры A над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ группа ее автоморфизмов* Aut (A) *является алгебраической группой в* GL (A), *и алгебра Ли группы* Aut (A) *совпадает с* der (A).

Доказательство. В (4.4.2) мы рассмотрели тот случай, когда A является алгеброй Ли. Однако доказательство проходит для любой алгебры. $\square$

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Напомним, что Ad $(\mathfrak{g})$ — это группа, порожденная exp (ad $(\mathfrak{g})$) (см. § 4.4).

(6.2.4) *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, для которой* der $(\mathfrak{g})$ = ad $(\mathfrak{g})$ (*например, пусть $\mathfrak{g}$ полупроста*). *Тогда* Ad $(\mathfrak{g})$ *совпадает с компонентой единицы в* Aut $(\mathfrak{g})$ *и является линейной группой.*

Доказательство. Это следует из (6.1.5) и (6.2.3). $\square$

Упражнение 1. Пусть P $(r, \mathbb{C})$ — множество всех верхне-треугольных матриц из GL $(r, \mathbb{C})$. Показать, что P $(r, \mathbb{C})$ есть алгебраическая группа, алгеброй Ли которой служит

$$\mathfrak{p}(r, \mathbb{C}) = \{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(r; \mathbb{C}) \colon a_{ij} = 0, \quad i > j\}.$$

Упражнение 2. Доказать, что алгеброй Ли группы SO (p, q) является

$$\mathfrak{so}(p, q) = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \colon A \in \mathfrak{o}(p),\ C \in \mathfrak{o}(q),\ B \text{ произвольно}\right\}.$$

6.3. Полярное разложение группы GL(r,$\mathbb{C}$)

Для всякой комплексной матрицы s будем обозначать через $\bar{s}$ комплексно-сопряженную матрицу. Положим $s^* = {}^t(\bar{s}) = (\overline{{}^ts})$. Матрица s из $\mathfrak{gl}\,(r, \mathbb{C})$ называется *эрмитовой*, если $s = s^*$. Эрмитовость матрицы $s = (s_{ij})$ означает, что числа s_{ii} вещественны и $\overline{s_{ij}} = s_{ji}$. Следовательно, множество $\mathfrak{h}\,(r)$ всех эрмитовых матриц из $\mathfrak{gl}\,(r, \mathbb{C})$ образует векторное пространство размерности r^2 над $\mathbb{R}$. Будем рассматривать элементы пространства $\mathbb{C}^r$ как векторы-столбцы и введем в нем скалярное произведение

$$v \cdot w = \sum \bar{v}_i w_i = v^* w \quad \text{для} \quad v = (v_i), \quad w = (w_i) \in \mathbb{C}^r$$

и соответствующую норму $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. В терминах этого скалярного произведения оператор $*$ в $\mathfrak{gl}\,(r, \mathbb{C})$ определяется формулой $v \cdot sw = s^* v \cdot w$, и матрица s эрмитова тогда и только тогда, когда $v \cdot sw = sv \cdot w$ для всех $v,\ w \in \mathbb{C}^r$.

Пусть s принадлежит $\mathfrak{h}\,(r)$ и λ — собственное значение матрицы s. Выберем ненулевой вектор $e \in \mathbb{C}^r$, для которого $se = \lambda e$. Из равенства $se \cdot e = e \cdot se$ следует, что $\lambda = \bar{\lambda}$, т. е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Далее, пусть $\sum$ — некоторое подмножество в $\mathfrak{h}\,(r)$. Если $\sum$ оставляет данное векторное подпространство V пространства $\mathbb{C}^r$ на месте, то ортогональное дополнение $V^\perp = \{w \in \mathbb{C}^r\colon\ w \cdot V = 0\}$ также инвариантно относительно $\sum$, т. е. $\sum$ вполне приводимо. Отсюда следует, что в случае одноточечного множества $\sum = \{s\}$ можно найти ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_r$ в $\mathbb{C}^r$ $(e_i \cdot e_j = \delta_{ij})$, такой что $se_i = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ при $i = 1, \ldots, r$. Пусть $[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$ обозначает диагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, и пусть u — матрица, у которой i-й столбец равен e_i, $i = 1, \ldots, r$. Тогда u унитарна, т. е. $u^* u = 1$,

$$(*) \qquad s = u\,[\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_r]\,u^{-1} \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Обратно, всякая матрица вида $(*)$ эрмитова.

Эрмитова матрица s называется *положительной* (или *положительно-определенной*), если все ее собственные значения положительны. Пусть $\mathrm{H}\,(r)$ обозначает совокупность всех положительных эрмитовых матриц в $\mathfrak{gl}\,(r, \mathbb{C})$. Множество $\mathrm{H}\,(r)$ открыто в $\mathfrak{h}\,(r)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать следующее предложение:

(6.3.1) *Пусть a принадлежит $\mathfrak{gl}\,(r, \mathbb{C})$. Если λ — собственное значение матрицы a кратности k, то для достаточно малых $\delta > 0$ у любой матрицы b, достаточно близкой к a, существует в точности k собственных значений в круге $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - \lambda| < \delta\}$.*

Доказательство. Предположим вначале, что λ является корнем многочлена

$$f(z) = z^r + \alpha_1 z^{r-1} + \cdots + \alpha_r \in \mathbb{C}[z],$$

имеющим кратность k. Пусть $\delta > 0$ — число, меньшее, чем расстояние от λ до остальных корней многочлена f, и пусть c — окружность, задаваемая уравнением $|z - \lambda| = \delta$. Поскольку $f(z) \neq 0$ на c, мы имеем $\min\{|f(z)|: z \in \mathbb{C}\} = m > 0$. Выберем $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{C}$ так, чтобы $|\gamma_1 z^{r-1} + \ldots + \gamma_r| < m$ при $z \in C$. Применим теперь теорему Руше. (Пусть f и g принадлежат $\mathbb{C}[z]$ и c — жорданова замкнутая кривая в $\mathbb{C}$. Если $|f(z)| > |g(z)|$ для всех $z \in c$, то число нулей функции f внутри c равно числу нулей функции $f + g$ внутри c.) Из этой теоремы сразу следует, что многочлен

$$h(z) = z^r + (\alpha_1 + \gamma_1) z^{r-1} + \ldots + (\alpha_r + \gamma_r)$$

имеет ровно k нулей внутри c.

Поскольку всякое собственное значение матрицы $a = (a_{ij})$ является корнем ее характеристического многочлена

$$\det(z1_r - a) = z^r + \alpha_1 z^{r-1} + \cdots + \alpha_r,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — некоторые многочлены от a_{ij}, наша теорема тем самым доказана. □

Для эрмитовой матрицы s, заданной формулой (*), имеем

$$\exp s = u[\exp\lambda_1, \ \ldots, \ \exp\lambda_r]\, u^{-1},$$

где $\exp\lambda_i > 0$. Следовательно, $\exp(\mathfrak{h}(r)) \subset \mathrm{H}(r)$.

Далее, для любого положительного числа α обозначим через $\mathrm{H}_\alpha(r)$ совокупность всех элементов из $\mathrm{H}(r)$, у которых максимальное собственное значение меньше 2α. Как известно, степенной ряд

$$\ln_\alpha z = \ln\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)^j$$

сходится в круге $\{z \in \mathbb{C}: |z - \alpha| < \alpha\}$, и если $\alpha < \beta$, то $\ln_\alpha z = \ln_\beta z$ для всех z, таких что $|z - \alpha| < \alpha$. При $s = u[\mu_1, \ldots, \mu_r]\, u^{-1} \in \mathrm{H}_\alpha(r)$ ряд

$$\begin{aligned} \ln_\alpha s &= \ln\alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{s-\alpha}{\alpha}\right)^j \\ &= u(\ln_\alpha[\mu_1, \ \ldots, \ \mu_r])\, u^{-1} \\ &= u[\ln_\alpha\mu_1, \ \ldots, \ \ln_\alpha\mu_r]\, u^{-1} \end{aligned}$$

абсолютно сходится и определяет голоморфное отображение $\ln_\alpha: \mathrm{H}_\alpha(r) \to \mathfrak{h}(r)$. Далее, если $\alpha < \beta$, то $\ln_\alpha s = \ln_\beta s$ при

$s \in \mathrm{H}_\alpha(r)$. Следовательно, как и в случае комплексных чисел, мы имеем голоморфное отображение $\ln$: $\mathrm{H}(r) \to \mathfrak{h}(r)$, для которого $\ln \circ \exp = \mathrm{id}$ на $\mathfrak{h}(r)$. Поэтому $\exp$ является биголоморфным отображением из $\mathfrak{h}(r)$ на $\mathrm{H}(r)$.

(6.3.2) 1) $\exp$: $\mathfrak{h}(r) \to \mathrm{H}(r)$ — *биголоморфное сюръективное отображение.*

2) *Для любого* $a \in \mathrm{H}(r)$ *существует единственный элемент* $b \in \mathrm{H}(r)$, *такой что* $b^2 = a$ (*мы пишем в этом случае* $b = \sqrt{a}$).

3) $\mathrm{H}(r)$ — *регулярно вложенное замкнутое подмногообразие в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Доказательство. 2) Для $a = \exp X$, где $X \in \mathfrak{h}(r)$, положим $b = \exp(X/2) \in \mathrm{H}(r)$. Тогда $b^2 = a$. Если $(\exp Y)^2 = a$ для некоторого $Y \in \mathfrak{h}(r)$, то $\exp(2Y) = \exp X$ и $2Y = X$.

3) Допустим, что $a_1, a_2, \ldots \in \mathrm{H}(r)$ и $a_0 = \lim a_j \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Тогда $a_0 \in \mathfrak{h}(r)$ и каждое собственное значение λ матрицы a_0 неотрицательно, согласно (6.3.1). Так как $a_0 \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, то $\lambda > 0$. Следовательно, $\mathrm{H}(r)$ замкнуто в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Далее, пусть a принадлежит $\mathrm{H}(r)$. Выберем вещественное подпространство $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, для которого

$$\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}) = \sqrt{a}^{-1}\,\mathfrak{h}(r)\sqrt{a} + \mathfrak{p}, \quad \sqrt{a}^{-1}\,\mathfrak{h}(r)\sqrt{a} \cap \mathfrak{p} = 0.$$

Возьмем такую окрестность $\mathfrak{h}_0^a$ точки 0 в $\sqrt{a}^{-1}\mathfrak{h}(r)\sqrt{a}$ и такую окрестность $\mathfrak{p}_0$ точки 0 в $\mathfrak{p}$, что отображение

$$\psi\colon\ \mathfrak{h}_0^a \times \mathfrak{p}_0 \ni (X, Y) \to \exp X \cdot \exp Y$$

биголоморфно. Поскольку $\mathrm{H}(r)$ открыто в $\mathfrak{h}(r)$, то, полагая $\psi(\mathfrak{h}_0^a \times \mathfrak{p}_0) = W$, мы можем считать, что $aW \cap \mathfrak{h}(r) \subset \mathrm{H}(r)$. Кроме того, мы можем предположить, что степенной ряд $\ln = \ln_1$ абсолютно сходится на W.

При этих предположениях допустим, что матрица ab эрмитова для некоторого $b \in W$. Так как ряд для $\ln b$ сходится и $\ln b^* = (\ln b)^*$, то из равенства $(ab)^* = ab$ (т. е. $b^* = aba^{-1}$) получаем $(\ln b)^* = a(\ln b)\,a^{-1}$. Следовательно,

$$\sqrt{a}(\ln b)\sqrt{a}^{-1} = \sqrt{a}^{-1}(\ln b)^*\sqrt{a} = \left(\sqrt{a}(\ln b)\sqrt{a}^{-1}\right)^*,$$

так что $\ln b \in \sqrt{a}^{-1}\mathfrak{h}(r)\sqrt{a}$. Обратно, если $X \in \sqrt{a}^{-1}\mathfrak{h}(r)\sqrt{a}$, то $a\exp X \in \mathrm{H}(r)$. Таким образом, $aW \cap \mathrm{H}(r) = \exp(\mathfrak{h}_0^a)$. Поскольку отображение

$$aW \ni a\exp X \cdot \exp Y \to (X, Y) \in \mathfrak{h}_0^a \times \mathfrak{p}_0$$

определяет на aW локальную систему координат для $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ и подмножество $aW \cap \mathrm{H}$ в aW задается условием $Y = 0$, мы за-

ключаем на основании (6.1.2), что H (r) есть регулярно вложенное подмногообразие в GL $(r, \mathbb{C})$. ▯

Теперь мы готовы к доказательству следующей теоремы:

(6.3.3) (Полярное разложение комплексной полной линейной группы.) *Всякий элемент s группы* GL $(r, \mathbb{C})$ *может быть единственным образом записан в виде*

$$s = u \exp X, \text{ где } u \in \mathrm{U}(r),\ X \in \mathfrak{h}(r),$$

и этим задается биголоморфное отображение между GL $(r, \mathbb{C})$ *и* $\mathrm{U}(r) \times \mathfrak{h}(r)$.

Доказательство. Для любого $s \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ элемент s^*s эрмитов и форма $s^*sv \cdot w = sv \cdot sw$ положительно-определенна. Следовательно, $s^*s \in \mathrm{H}(r)$. Положим $\sqrt{s^*s} = a \in \mathrm{H}(r)$ и $u = sa^{-1}$. Тогда $u^*u = (a^*)^{-1}s \cdot sa^{-1} = 1$ и $u \in \mathrm{U}(r)$.

Далее, предположим, что $ua = a'$, причем $u \in \mathrm{U}(r)$, а a, $a' \in \mathrm{H}(r)$. Тогда $(a')^2 = a'^*a' = a^*u^*ua = a^2$ и потому $a = a'$, в силу (6.3.2), 2). Следовательно, если $u_1a_1 = u_2a_2$, где $u_j \in \mathrm{U}(r)$ и $a_j \in \mathrm{H}(r)$ $(j = 1, 2)$, то $(u_2^{-1}u_1)\, a_1 = a_2$ и $u_2^{-1}u_1 \in \mathrm{U}(r)$, так что $a_1 = a_2$. Этим доказана единственность разложения.

Наконец, отображение $\mathrm{U}(r) \times \mathfrak{h}(r) \ni (u, X) \to u \exp X \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ голоморфно, и, обратно,

$$X = \frac{1}{2} \ln (s^*s) \quad \text{и} \quad u = s \exp(-X)$$

— голоморфные функции от s. ▯

Докажем теперь теорему, аналогичную теореме (6.3.3), для группы GL $(r, \mathbb{R})$. Пусть s принадлежит GL $(r, \mathbb{R})$ и

$$s = ua, \text{ где } u \in \mathrm{U}(r),\ a \in \mathrm{H}(r).$$

Тогда $\bar{u} \in \mathrm{U}(r)$, $\bar{a} \in \mathrm{H}(r)$ и $s = \bar{s} = \bar{u}\bar{a}$. Поэтому, ввиду единственности разложения, $u = \bar{u}$ и $a = \bar{a}$.

Положим

$$\mathfrak{h}(r) \cap \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}) = \mathfrak{s}(r) \quad \text{и} \quad H(r) \cap \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) = \mathrm{S}(r).$$

Очевидно, $\mathfrak{s}(r)$ есть множество всех симметричных матриц в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$, а $\mathrm{S}(r)$ — множество всех положительных матриц в $\mathfrak{s}(r)$. Поскольку $\exp(\mathfrak{s}(r))$ и $\ln(\mathrm{S}(r))$ состоят из вещественных матриц, мы видим, что exp отображает $\mathfrak{s}(r)$ на $\mathrm{S}(r)$. Кроме того, $\mathrm{U}(r) \cap \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(r)$. Таким образом, имеет место следующая теорема:

(6.3.4) (Полярное разложение вещественной полной линейной группы.) *Всякий элемент* $s \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ *единственным образом записывается в виде*

$$s = u \exp X, \text{ где } u \in \mathrm{O}(r),\ X \in \mathfrak{s}(r),$$

и этим определяется биголоморфное отображение между GL $(r, \mathbb{R})$ *и* O $(r) \times \mathfrak{S}(r)$.

Упражнение 1. U (r) — максимальная компактная подгруппа в GL $(r, \mathbb{C})$, а O (r) — максимальная компактная подгруппа в GL $(r, \mathbb{R})$.

Упражнение 2. Для всякого $a \in \mathrm{S}(r)$ найдется элемент $u \in \mathrm{O}(r)$, такой что $a = u\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]\,u^{-1}$ $(\lambda_i > 0)$.

Упражнение 3. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \quad (a_j \in \mathbb{C})$$

— степенной ряд с радиусом сходимости $R > 0$, и пусть $s \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. Предположим, что все собственные значения матрицы s по абсолютной величине меньше R. Тогда ряд $f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ абсолютно сходится. [*Указание.* Используя жорданову нормальную форму матрицы s, можно свести задачу к случаю

$$s = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}), \quad |\lambda| < R.$$

Обозначая h-ю (формальную) производную функции f через $f^{(h)}$, имеем

$$f(s) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f^{(1)}(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & \dfrac{f^{(r-2)}(\lambda)}{(r-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, радиус сходимости ряда для $f^{(h)}$ равен R.]

Упражнение 4. Для всякого коммутативного подмножества Σ в $\mathfrak{S}(r)$ существует элемент $u \in \mathrm{O}(r)$, такой что

$$u \sum u^{-1} \subset \mathrm{diag}(r, \mathbb{R}).$$

6.4. Разложения Картана полупростых линейных групп

Вначале докажем одну теорему, принадлежащую К. Шевалле.

(6.4.1) *Пусть G — алгебраическая группа в* GL $(r, \mathbb{R})$ *и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли.*

1) *Если $a \in \mathrm{S}(r) \cap G$, то $\ln a \in \mathfrak{g}$.*

2) *Если $s = ua$ $(u \in \mathrm{O}(r),\ a \in \mathrm{S}(r))$ и ${}^t s$ принадлежит G, то $u, a \in G$.*

3) *Если $G = {}^t G$, то $G = K \cdot \exp(\mathfrak{p})$, где $K = \mathrm{O}(r) \cap G$, а $\mathfrak{p} = \mathfrak{S}(r) \cap \mathfrak{g}$ и как многообразие G есть прямое произведение*

$K \times \mathfrak{p}$. Группа K является максимальной компактной подгруппой в G, и ее алгебра Ли $\mathfrak{k}$ совпадает с $\mathfrak{o}(r) \cap \mathfrak{g}$.

Доказательство. 1) Обозначим через $\mathrm{D}(r)$ подгруппу всех диагональных матриц в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$. В силу упр. 2 § 6.3, найдется элемент $b \in \mathrm{O}(r)$, такой что $bab^{-1} \in \mathrm{D}(r)$. Так как bGb^{-1} также является алгебраической группой, мы можем предполагать в дальнейшем, что $a \in \mathrm{D}(r)$. Тогда $\mathrm{D} = \mathrm{D}(r) \cap G$ есть алгебраическая группа, содержащая a. Пусть $\{f_\alpha\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_r]$ — множество многочленов от r переменных $x_1, \ldots, x_r$, определяющее D. Так как $a = [\lambda_1, \ldots, \lambda_r] \in D$, то $f_\alpha(\lambda_1^l, \ldots, \lambda_r^l) = 0$ при $l \in \mathbb{Z}$. Положим

$$F_\alpha(t) = f_\alpha(\exp(t \ln \lambda_1), \ldots, \exp(t \ln \lambda_r)) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Поскольку f_α — многочлен, F_α можно записать в виде

$$F_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \exp(t\beta_j), \quad \mu_j, \beta_j \in \mathbb{R},$$

причем мы можем считать, что $\beta_i \neq \beta_j$ и соответственно $\exp \beta_i \neq \exp \beta_j$ при $i \neq j$. Тогда

$$\det\left((\exp \beta_j)^l_{j=1, \ldots, k;\ l=0, 1, \ldots, k-1}\right) \neq 0,$$

в силу теоремы ван дер Монда. Так как

$$F_\alpha(l) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j (\exp \beta_j)^l = 0 \quad \text{при } l = 0, 1, \ldots, k-1,$$

то $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$ и $F_\alpha(t) = 0$. Таким образом, мы доказали, что $\ln a \in \mathfrak{g}$.

2) Имеем ${}^t ss = {}^t a {}^t uua = a^2 \in \mathrm{S}(r) \cap G$. В силу 1), $\ln a = 2^{-1} \ln a^2 \in \mathfrak{g}$ и $a \in G$.

3) Указанное разложение следует из (6.3.4) и 2). Как замкнутая подгруппа компактной группы $\mathrm{O}(r)$ группа K компактна. С другой стороны, всякая подгруппа L группы G, удовлетворяющая условию $K \subsetneq L$, содержит некоторый элемент $a \in \mathrm{S}(r)$, $a \neq 1$, а подгруппа, порожденная a, не может содержаться ни в каком компактном множестве. ▯

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

— ее разложение Картана. Как показано в § 4.5, отображение τ: $X + Y \to X - Y$ ($X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$) есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ и $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Форма Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ является отрицательно-определенной на $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$, положительно-определенной на $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$, и $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Положим

$$\varphi(U, V) = -B(U, \tau V) \text{ для } U, V \in \mathfrak{g}.$$

Легко видеть, что φ — положительно-определенная симметричная билинейная форма. Для любых $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$ имеем $\operatorname{ad} X \circ \tau = \tau \circ \operatorname{ad} X$, $\operatorname{ad} Y \circ \tau = -\tau \circ \operatorname{ad} Y$ и

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(\operatorname{ad} X \cdot U, V) + \varphi(U, \operatorname{ad} X \cdot V) = 0, \\ \varphi(\operatorname{ad} Y \cdot U, V) = \varphi(U, \operatorname{ad} Y \cdot V). \end{cases}$$

Пусть $E_1, \ldots, E_r$ — такой базис в $\mathfrak{g}$, что $\varphi(E_i, E_j) = \delta_{ij}$. С помощью этого базиса группу $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ можно отождествить с некоторой алгебраической группой в $GL(r, \mathbb{R})$. Для $\rho \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ и $U, V \in \mathfrak{g}$ имеем $B(\rho U, \rho V) = B(U, V)$ и

$$\varphi(\rho U, V) = -B(\rho U, \tau V) = -B(U, \rho^{-1}\tau V)$$
$$= \varphi(U, \tau\rho^{-1}\rho V).$$

Используя указанное выше отождествление, это можно записать в виде ${}^t\rho = \tau\rho^{-1}\rho \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. Таким образом, ${}^t(\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})) = \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.

Алгебра Ли $\operatorname{der}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ отождествляется с некоторой подалгеброй в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$, и из (1) следует, что

$$\operatorname{ad}(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{o}(r) \quad \text{и} \quad \operatorname{ad}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{s}(r),$$

где $\operatorname{ad}(\mathfrak{k}) = \{\operatorname{ad} X : X \in \mathfrak{k}\}$. (Мы будем использовать подобные обозначения и далее, в тех случаях когда это не может привести к недоразумению.) Применяя (6.4.1), приходим к следующему результату:

(6.4.2) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — ее разложение Картана.*

1) *Разложение* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) = K \cdot \exp(\operatorname{ad}(\mathfrak{p}))$ *определяет голоморфное разложение многообразия* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ *в прямое произведение* $K \times \mathfrak{p}$, *где* K *— некоторая максимальная компактная подгруппа в* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ *с алгеброй Ли* $\operatorname{ad}(\mathfrak{k})$.

2) $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) = K_0 \cdot \exp(\operatorname{ad}(\mathfrak{p}))$, *где* K_0 *— компонента единицы группы* K.

Доказательство. 1) Из соотношений $\operatorname{ad}(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{o}(r)$ и $\operatorname{ad}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{s}(r)$ следует, что $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{o}(r) = \operatorname{ad}(\mathfrak{k})$. Согласно упр. 1 § 6.1, алгебра Ли группы K совпадает с $\operatorname{ad}(\mathfrak{k})$.

2) Поскольку, согласно (6.2.4), $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$ является компонентой единицы в $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, в разложении $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) = K \times \mathfrak{p}$ ей отвечает связная компонента в $K \times \mathfrak{p}$, содержащая $(1, 0)$. $\square$

(6.4.3) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{u}$ — ее компактная вещественная форма. Тогда*

$$\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) = U \cdot \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u}), \quad U \cap \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u}) = 1,$$

где U — *некоторая максимальная компактная подгруппа в* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, *имеющая алгебру Ли* $\operatorname{ad}(\mathfrak{u})$, *и*

$$\operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \operatorname{Aut}(\mathfrak{u}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}),$$

где $\operatorname{Aut}(\mathfrak{u})$ *рассматривается как подгруппа в* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Рассматривая $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, получаем разложение Картана $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} + \sqrt{-1}\mathfrak{u}$ (упр. 3 § 2.5). Следовательно, $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) = K \cdot \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$. Поскольку алгеброй Ли группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ является $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, мы имеем $K \cdot \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u}) \supset \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) \supset K_0 \cdot \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$, где K_0 — компонента единицы в K. Следовательно,

$$\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) = U \cdot \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u}), \quad K \supset U \supset K_0.$$

Так как алгеброй Ли группы K_0 служит $\operatorname{ad}(\mathfrak{u})$, то $K_0 = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$ и $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u}) \cdot \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$.

В силу (4.6.2), 2), группа $\operatorname{Aut}(\mathfrak{u})$ компактна. Но $\operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$ — максимальная компактная подгруппа в $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$; следовательно, $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \operatorname{Aut}(\mathfrak{u}) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$. □

(6.4.4) *Для всякой полупростой подалгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в* $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ *существует алгебраическая группа* G *в* $GL(r, \mathbb{R})$, *такая что* $\mathfrak{g}$ *является ее алгеброй Ли. Отсюда, в частности, следует, что группа, порожденная* $\exp(\mathfrak{g})$, *замкнута.*

Доказательство. Алгебра $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ есть комплексная полупростая алгебра Ли. Найдем сначала алгебраическую группу $\tilde{G}$, алгебра Ли которой равна $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Поскольку алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ вполне приводима (см. (3.4.4)), можно найти такие подпространства $V_1, \ldots, V_k$ в $\mathbb{C}^r$, что

$$\mathbb{C}^r = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$$

и $\tilde{\mathfrak{g}}$ действует неприводимо на каждом из V_i.

Пусть G^* — совокупность всех элементов a из $GL(r, \mathbb{C})$, удовлетворяющих соотношениям

(1) $a\tilde{\mathfrak{g}}a^{-1} = \tilde{\mathfrak{g}}$,

(2) $aV_i = V_i$ и $\det(a|_{V_i}) = 1$ при $i = 1, \ldots, k$.

Покажем, что G^* является алгебраической группой. Очевидно, что соотношения (2) определяют некоторую алгебраическую группу. Пусть $\{E_1, \ldots, E_{r^2}\}$ — базис в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, такой что $\{E_1, \ldots, E_q\}$ — базис в $\tilde{\mathfrak{g}}$. Для $x = (x_{ij}) \in GL(r, \mathbb{C})$ имеем

$$xE_jx^{-1} = \sum_{i=1}^{r^2} f_{ij}(x) E_i,$$

где $f_{ij}(x)$ — рациональные функции от $x_{11}, \ldots, x_{rr}$. Поэтому условие

$$f_{ij}(x) = 0 \text{ для } j \leqslant q < i$$

выражается полиномиальными уравнениями. Следовательно, равенство (1) тоже определяет некоторую алгебраическую группу. Тем самым показано, что G^* — алгебраическая группа.

Пусть $\mathfrak{g}^*$ — алгебра Ли группы G^* и $X \in \mathfrak{g}^*$. В силу формулы (6) § 6.1,

$$\varphi(\lambda) = \exp(\lambda X) \cdot Y \cdot \exp(-\lambda X) = (\exp(\operatorname{ad} \lambda X))\, Y$$
$$= Y + \lambda [X, Y] + \frac{1}{2} \lambda^2 [X, [X, Y]] + \cdots,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$. Но ввиду (1), если $Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$, то и $\varphi(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$, а значит и $\frac{d\varphi}{d\lambda}(0) = [X, Y] \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Таким образом, $[\mathfrak{g}^*, \tilde{\mathfrak{g}}] \subset \tilde{\mathfrak{g}}$. Поскольку $\mathfrak{g}^* \supset \tilde{\mathfrak{g}}$, можно найти идеал $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}^*$, такой что $\mathfrak{g}^* = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{m}$ (см. (1.5.7)). Пусть Z принадлежит $\mathfrak{m}$. Так как $[\tilde{\mathfrak{g}}|_{V_i}, Z|_{V_i}] = 0$, то, по лемме Шура (1.2.3), $Z|_{V_i} \in \mathbb{C}1$. С другой стороны, $\operatorname{tr} Z|_{V_i} = 0$, в силу (2). Следовательно, $Z|_{V_i} = 0$ и $Z = 0$. Итак, $\mathfrak{g}^* = \tilde{\mathfrak{g}}$ и алгебра Ли группы G^* совпадает с $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Положим $G^* \cap \mathrm{GL}(r, R) = G$. Тогда G — алгебраическая группа в $\mathrm{GL}(r, R)$ и ее алгебра Ли равна $\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}$. □

Замечание. Линейная группа называется *полупростой*, если ее алгебра Ли полупроста.

(6.4.5) *Для всякой компактной полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{u}$ *в* $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ *существует элемент* $a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, *такой что* $a\mathfrak{u}a^{-1} \subset \mathfrak{u}(r)$.

Это немедленно следует из (6.7.3) и (6.9.2).

(6.4.6) *Теорема. Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ *и* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — *ее разложение Картана.*

1) *Существует положительная симметричная матрица* $b \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, *такая что*

$$b\mathfrak{k}b^{-1} \subset \mathfrak{o}(r) \quad \text{и} \quad b\mathfrak{p}b^{-1} \subset \mathfrak{s}(r).$$

2) *Пусть* G *и* K — *подгруппы в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, *порожденные* $\exp(\mathfrak{g})$ *и* $\exp(\mathfrak{k})$ *соответственно. Тогда* G *и* K — *линейные группы, причем группа* K *компактна. Всякий элемент* x *из* G *может быть единственным способом записан в виде*

$$x = c \cdot \exp Y, \quad \text{где } c \in K,\ Y \in \mathfrak{p},$$

и этим определяется биголоморфное отображение между G *и* $K + \mathfrak{p}$.

Доказательство. 1) Как мы видели в § 4.5, алгебра $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p} \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ компактна и полупроста. Согласно (6.4.4), найдется элемент $a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, для которого $a\mathfrak{u}a^{-1} \subset \mathfrak{u}(r)$. Используя полярное разложение группы $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, можно найти такие элементы $d \in \mathrm{U}(r)$ и $h \in \mathrm{H}(r)$, что $a = d\sqrt{\bar{h}}$. Тогда $\sqrt{\bar{h}}\mathfrak{u}\sqrt{\bar{h}}^{-1} \subset d^{-1}\mathfrak{u}(r)\,d = \mathfrak{u}(r)$. Запишем h в виде $h = b + ie$, где b и e — вещественные матрицы. Поскольку $h^* = h$, матрица b симметрична. Далее, поскольку матрица h положительна, то положительна и $\bar{h}$, а значит и $b = (h + \bar{h})/2$.

Пусть Z принадлежит $\mathfrak{u}$. Ввиду того что $\sqrt{\bar{h}}Z\sqrt{\bar{h}}^{-1} \in \mathfrak{u}(r)$, мы имеем $(\sqrt{\bar{h}}Z\sqrt{\bar{h}}^{-1})^* + \sqrt{\bar{h}}Z\sqrt{\bar{h}}^{-1} = 0$, откуда следует, что $Z^*h + hZ = 0$. Следовательно, ${}^tX(b + ie) + (b + ie)X = 0$ и ${}^tXb + bX = 0$ для любого $X \in \mathfrak{k}$. Поэтому ${}^t(\sqrt{\bar{b}}X\sqrt{\bar{b}}^{-1}) = \sqrt{\bar{b}}^{-1}\cdot{}^tX\cdot\sqrt{\bar{b}} = -\sqrt{\bar{b}}X\sqrt{\bar{b}}^{-1}$ т. е. $\sqrt{\bar{b}}X\sqrt{\bar{b}}^{-1} \in \mathfrak{o}(r)$. Аналогично для любого $Y \in \mathfrak{p}$ имеем $-i{}^tY(b + ie) + (b + ie)iY = 0$ и ${}^tYb = bY$. Отсюда мы заключаем, что $\sqrt{\bar{b}}Y\sqrt{\bar{b}}^{-1} \in \mathfrak{s}(r)$.

2) В силу 1), можно считать, что $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{o}(r)$ и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{s}(r)$. Тогда ${}^t\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$, ${}^t\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ и ${}^t\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Согласно (6.4.4), существует такая алгебраическая группа A в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, что G есть ее компонента единицы. Так как ${}^t\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ и ${}^t(\exp Z) = \exp({}^tZ)$, то $G = {}^tG$. Поскольку A — алгебраическая группа, такова же и ${}^tA$. Следовательно, $A_1 = A \cap {}^tA$ — алгебраическая группа, содержащая G. Далее, ${}^tA_1 = A_1$. В этой ситуации мы можем применить (6.4.1). □

Замечание. Разложение из (6.4.2), 2) называется *разложением Картана* полупростой линейной группы G.

Упражнение. Пусть $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^r)$ обозначает группу всех преобразований в $\mathbb{R}^r$ вида

$$(s, a) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^r,$$

где $(s, a)\,v = sv + a$ для $v \in \mathbb{R}^r$. Показать, что $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^r)$ можно отождествить с некоторой замкнутой подгруппой в $\mathrm{GL}(r + 1, \mathbb{R})$, полагая

$$\begin{pmatrix} s & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sv + a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Алгеброй Ли группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^r)$ является алгебра $\mathrm{aff}(\mathbb{R}^r)$, рассмотренная в § 3.5. Пусть G — связная полупростая линейная группа в $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^r)$ и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Показать, что G имеет неподвижную точку, т. е. существует элемент $v_0 \in \mathbb{R}^r$, такой что $(s, a)\,v_0 = v_0$ для всех $(s, a) \in G$. [*Указание*: см. (3.5.4).]

6.5. Таблица умножения алгебры Ли

Пусть G — линейная группа в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда $\exp(\mathfrak{g})$ порождает компоненту единицы в G. Однако для произвольной подалгебры Ли $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ группа, порожден-

ная $\exp(\mathfrak{g}')$, вообще говоря, не замкнута. В самом деле, для одномерной алгебры Ли

$$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2\pi\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\pi\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

$\exp(\mathfrak{g}_0)$ — незамкнутая однопараметрическая подгруппа в $GL(2, \mathbb{C})$. С другой стороны, если $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли некоторой линейной группы, то для $X, Y \in \mathfrak{g}$, достаточно близких к 0, мы имеем $\exp X \exp Y \in \exp(\mathfrak{g})$. Этот факт может быть обобщен на произвольные подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, и это и будет предметом рассмотрения настоящего параграфа.

Для $X, Y \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ положим

$$(1)\qquad f(X, Y) = \ln(\exp X \exp Y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Y^l}{l!} - 1\right)^j.$$

Существует такая окрестность U точки 0 в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, что степенной ряд $f(X, Y)$ абсолютно сходится при $X, Y \in U$.

Далее для $X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ положим

$$(2)\qquad \varphi(X) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}\,X)^{j-1}}{j!} = 1 + \frac{\mathrm{ad}\,X}{2!} + \frac{(\mathrm{ad}\,X)^2}{3!} + \cdots.$$

Степенной ряд $\varphi(X)$ можно записать формально как

$$\varphi(X) = \frac{\exp \mathrm{ad}\,X - 1}{\mathrm{ad}\,X},$$

хотя $\det(\mathrm{ad}\,X) = 0$; этот ряд сходится для любого X, ввиду того что числовой степенной ряд

$$\frac{\exp z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

сходится для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. упр. 3 § 6.3). Таким образом, $\varphi(X)$ — корректно определенное линейное преобразование векторного пространства $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$.

(6.5.1) *Для* $X, Y \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ *и* $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\exp(X + \lambda Y)\exp(-X) = 1 + \lambda\varphi(X)\,Y + O(\lambda^2),$$

$$\exp(-X)\exp(X + \lambda Y) = 1 + \lambda\varphi(-X)\,Y + O(\lambda^2),$$

где $O(\lambda^2)$ *обозначает некоторый степенной ряд от* λ, *начинающийся с члена с* λ^2.

Доказательство. Зафиксируем $X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ и определим элементы L, R и $\theta = \operatorname{ad} X$ алгебры $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}))$ формулами $LZ = XZ$, $RZ = ZX$ для $Z \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ и $\theta = L - R$. Ясно, что преобразования L, R и θ попарно перестановочны. Положим

$$\psi_m = \sum_{j=0}^{m} L^j R^{m-j}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m}{(m+1)!} = \psi.$$

Имеем

$$\exp(X + \lambda Y) = 1 + (X + \lambda Y) + \frac{(X + \lambda Y)^2}{2!} + \dots$$

$$= \exp X + \lambda \psi Y + O(\lambda^2).$$

Поскольку $L = R + \theta$, то

$$\psi_m = \sum_{j=0}^{m} (R + \theta)^j R^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \theta^k R^{j-k} R^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{m}{k} \right) \theta^k R^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k+1} \theta^k R^{m-k}.$$

Следовательно,

$$\frac{\psi_m}{(m+1)!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\theta^k}{(k+1)!} \frac{R^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{i+j=m} \frac{\theta^i}{(i+1)!} \frac{R^j}{j!}$$

и

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m}{(m+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^i}{(i+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^j}{j!} = \varphi(X) \exp R.$$

Поэтому

$$\psi Y = (\varphi(X) \exp R)\, Y = \varphi(X)\, Y \exp X.$$

Это доказывает первую формулу.

Докажем теперь вторую. В силу формулы (6) § 6.1,

$$\begin{aligned}
&\exp(-X)\exp(X+\lambda Y)\\
&=\exp(-X)\exp(X+\lambda Y)\exp X\exp(-X)\\
&=\exp((\exp\operatorname{ad}(-X))(X+\lambda Y))\exp(-X)\\
&=\exp(X+\lambda(\exp\operatorname{ad}(-X))Y)\exp(-X)\\
&=1+\lambda(\varphi(X)\exp\operatorname{ad}(-X))Y+O(\lambda^2).
\end{aligned}$$

Но имеет место равенство $\varphi(X)\exp\operatorname{ad}(-X)=\varphi(-X)$, аналогичное (и доказываемое аналогично) равенству

$$\frac{\exp z-1}{z}\exp(-z)=\frac{\exp(-z)-1}{-z}\quad \text{для } z\in\mathbb{C}. \ \square$$

Пусть $d\exp_X\colon \mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})\to\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ обозначает инфинитезимальное линейное отображение (производную) экспоненциального отображения в точке X:

$$d\exp_X Y=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\exp(Y+\lambda Y)-\exp X}{\lambda}.$$

Из (6.5.1) следует, что

(6.5.2) $d\exp_X Y=(\varphi(X)Y)\exp X=\exp X(\varphi(-X))Y$.

Поскольку $\varphi(0)$ — тождественное отображение, $\varphi(X)$ невырожденно для X, достаточно близких к 0. Для $X, Y, Z\in\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ и $\lambda\in\mathbb{C}$ имеем, в силу (6.5.1),

$$\begin{aligned}
&\exp(X+\lambda X)\exp(Y+\lambda Z)\\
&=\exp X\exp(\lambda X)(1+\lambda\varphi(Y)Z+O(\lambda^2))\exp Y\\
&=\exp X(1+\lambda(X+\varphi(Y)Z)+O(\lambda^2))\exp Y.
\end{aligned}$$

Положим $Z=-\varphi(Y)^{-1}X$ и $p(\lambda)=f(X+\lambda X,\ Y-\lambda\varphi(Y)^{-1}X)$. Тогда $\exp p(\lambda)=\exp X(1+O(\lambda^2))\exp Y$ и $\frac{d}{d\lambda}\exp p(\lambda)=0$ при $\lambda=0$. Так как

$$p(\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}(\exp p(\lambda)-1)^j,$$

то $\frac{dp}{d\lambda}(0)=0$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ и $\{E_1,\ldots,E_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$. Пусть $X=\sum x_iE_i$ и $Y=\sum y_iE_i$ принадлежит $\mathfrak{g}$; положим

$$\tilde f(x,y)=\tilde f(x_1,\ldots,x_m;\ y_1,\ldots,y_m)=f(X,Y).$$

Можно считать, что

(3) $\tilde{f} = \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 + \ldots,$

где $\tilde{f}_k = \tilde{f}_k(x, y)$ — однородный многочлен степени k по переменным $x_1, \ldots, x_m$. В частности, $\tilde{f}_0 = \sum y_i E_i$. Полагая

(4) $$\varphi(Y)^{-1} E_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}(y) E_j,$$

получаем

$$p(\lambda) = \tilde{f}\left((1+\lambda) x_1;\; y_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(y) x_j\right).$$

Заметим, что $\tilde{f}$ и a_{ij} можно определить для (x_i) и (y_i), достаточно близких к 0. Равенство $\frac{dp}{d\lambda}(0) = 0$ влечет теперь равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} x_i = \sum_{i,\, j=1}^{m} a_{ij}(y) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i} x_j.$$

Поскольку $\sum_i \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x_i} x_i = k\tilde{f}_k$, имеем

$$k\tilde{f}_k = \sum_{i,\, j} x_j a_{ij}(y) \frac{\partial \tilde{f}_{k-1}}{\partial y_i} D\tilde{f}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где D обозначает дифференциальный оператор

$$D = \sum_{i,\, j} x_j a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Так как $\tilde{f}_0 = \sum y_i E_i$, то $\tilde{f}_k = \frac{1}{k!} D^k \sum y_i E_i$, т. е.

(5) $\tilde{f}(x, y) = (\exp D) \sum y_i E_i.$

Поэтому, в частности, $\tilde{f}(x, y) \in \mathfrak{g}$. Таким образом, мы установили следующую теорему:

(6.5.3) *Для $X, Y \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, достаточно близких к 0, элемент $f(X, Y) = \ln(\exp X \exp Y)$ содержится в алгебре Ли, порожденной X и Y.*

Теорема (6.5.3) позволяет нам связать с каждой лиевой подалгеброй $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ голоморфную функцию f, действующую из некоторой окрестности точки $(0, 0) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$. Будем называть f *таблицей умножения* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что структура алгебры Ли в $\mathfrak{g}$ задается формулами $[E_i,$

$E_j] = \sum_k c_{ijk} E_k$ $(c_{ijk} \in \mathbb{R})$ при $i, j = 1, \ldots, m$. Тогда $(\mathrm{ad}\, Y)\, E_j = \sum_k (\sum_i c_{ijk} y_i)\, E_k$ и $\varphi(Y)|_g$ задается матрицей

$$1 + \frac{C}{2!} + \frac{C^2}{3!} + \ldots,$$

где (j, k)-я компонента матрицы C (по отношению к базису $E_1, \ldots, E_m$) равна $\sum_i c_{ikj}\, y_i$. Следовательно, функции a_{ij} зависят только от $\{c_{ijk}\}$. Отсюда вытекает следующая теорема:

(6.5.4) *Пусть G_1 и G_2 — линейные группы, и для $i = 1, 2$ пусть $\mathfrak{g}_i$ — алгебра Ли группы G_i и $f^{(i)}$ — таблица умножения алгебры $\mathfrak{g}_i$. Предположим, что существует изоморфизм ρ алгебры $\mathfrak{g}_1$ на $\mathfrak{g}_2$. Тогда*

$$f(\rho X, \rho Y) = \rho f^{(1)}(X, Y)$$

для $X, Y \in \mathfrak{g}_1$, достаточно близких к 0.

Коротко говоря, таблица умножения алгебры Ли зависит только от ее структуры алгебры Ли.

Замечание. Для любой подалгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ группа G, порожденная $\exp(\mathfrak{g})$, образует подмногообразие в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ и является группой Ли относительно подходящей голоморфной структуры в G. Такая подгруппа G называется *связной подгруппой Ли* (или *аналитической подгруппой*) в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Однако в этой книге мы не будем рассматривать такие группы.

(6.5.5) *Пусть $\mathfrak{n}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, состоящая из нильпотентных матриц. Тогда* $\exp(\mathfrak{n})$ *есть линейная группа и отображение* $\exp\colon \mathfrak{n} \to \exp(\mathfrak{n})$ *биголоморфно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{n}(r, \mathbb{C}) = \{(x_{ij}) \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})\colon x_{ij} = 0\ (i \geqslant j)\}$ и $N(r, \mathbb{C}) = \{1 + X\colon X \in \mathfrak{n}(r, \mathbb{C})\}$. Ясно, что $\mathfrak{n}(r, \mathbb{C})$ — алгебра Ли алгебраической группы $N(r, \mathbb{C})$. Далее, как $\exp X$ для $X \in \mathfrak{n}(r, \mathbb{C})$, так и $\ln a$ для $a \in N(r, \mathbb{C})$ являются многочленами степени $r - 1$ от X и $a - 1$ соответственно и определяют биголоморфное соответствие между $\mathfrak{n}(r, \mathbb{C})$ и $N(r, \mathbb{C})$.

В силу упр. 3 § 1.3, мы можем считать, что $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}(r, \mathbb{C})$. Тогда функция $f(X, Y) = \ln(\exp X \exp Y)$ определена всюду на $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$. Так как f голоморфна и $f(X, Y) \in \mathfrak{n}$ для X, Y, достаточно близких к 0, то $f(X, Y) \in \mathfrak{n}$ для всех $(X, Y) \in \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$. Отсюда следует, что $\exp(\mathfrak{n})$ — группа. Поскольку подалгебра $\mathfrak{n}$, очевидно, замкнута в $\mathfrak{n}(r, \mathbb{C})$, группа $\exp(\mathfrak{n})$ замкнута в $N(r, \mathbb{C})$. □

Упражнение 1. Линейные группы G_1 и G_2 называются *локально-изоморфными*, если существует биголоморфное отображение σ некоторой окрестности U единицы в G_1 на некоторую окрестность единицы в G_2, такое что для любых $a, b \in U$, для которых $ab \in U$, справедливо равенство $\sigma(ab) = \sigma(a)\,\sigma(b)$. Доказать, что G_1 и G_2 локально-изоморфны тогда и только тогда, когда их алгебры Ли

$\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ изоморфны. [*Указание*. Если G_1 и G_2 локально-изоморфны, то $\sigma^* = \ln \circ \sigma \circ \exp$ является биголоморфным отображением некоторой окрестности точки 0 в алгебре $\mathfrak{g}_1$ в алгебру $\mathfrak{g}_2$. Используя формулы (4) и (5) § 6.1, показать, что $\sigma^*(\lambda X + Y) = \lambda\sigma^* X + \sigma^* Y$ и $\sigma^*([X, Y]) = [\sigma^* X, \sigma^* Y]$ для тех $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых все эти выражения определены. Обратное утверждение непосредственно следует из (6.5.4).]

Упражнение 2. Пусть X принадлежит $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. Дать необходимое и достаточное условие (в терминах собственных значений матрицы X) того, что $\det(d\exp_X = 0$.

Ответ: существует пара λ, μ собственных значений, для которых $\lambda - \mu) = 2\pi\sqrt{-1}l$, где $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. [*Указание.* Прежде всего, $\varphi(X)$ невырожденно тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}X$ не имеет собственных значений вида $2\pi\sqrt{-1}\,l$, $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Далее, если $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ — множество всех собственных значений матрицы X, то $\{\lambda_i - \lambda_j\colon i, j = 1, \ldots, r\}$ есть множество собственных значений преобразования $\operatorname{ad} X$.]

6.6. Разложения Ивасавы полупростых линейных групп

Пусть $\{c_1, \ldots, c_r\}$ — некоторый базис в $\mathbb{C}^r$. Напомним известный метод (*процесс Шмидта*) построения ортонормированной системы векторов (относительно скалярного произведения $(v_i)\cdot(w_i) = \sum \bar{v}_i w_i$), исходя из системы $c_1, c_2, \ldots$. Прежде всего полагаем

$$e_1' = c_1,$$

$$e_2' = -\frac{e_1'\cdot c_2}{e_1'\cdot e_1'}e_1' + c_2,$$

$$e_3' = -\frac{e_1'\cdot c_3}{e_1'\cdot e_1'}e_1' - \frac{e_2'\cdot c_3}{e_2'\cdot e_2'}e_2' + c_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Тогда $e_i'\cdot e_j' = 0$ при $i \neq j$. Будем обозначать через $|\lambda_1, \ldots, \lambda_r|$ диагональную матрицу $(\lambda_i\delta_{ij})$. Далее, пусть $e_i = e_i'/\|e_i'\|$, $i = 1, \ldots, r$. Рассматривая элементы пространства $\mathbb{C}^r$ как векторы-столбцы, имеем

$$(c_1, \ldots, c_r) = (e_1', \ldots, e_r')\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (e_1, \ldots, e_r)\,|\|e_1'\|, \ldots, \|e_r'\||\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

По построению элементы e_1', ..., e_r' и соответственно компоненты трех матриц в правой части последнего равенства голоморфно зависят от $c_1, \ldots, c_r$. Поскольку $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, матрица $(e_1, \ldots, e_r)$ унитарна, т. е. $(e_1, \ldots, e_r) \in \mathrm{U}(r)$. Обозначим через $\mathrm{D}^+(r)$ группу всех диагональных матриц $[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$ с положительными λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Для $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ положим

$$N(r,P) = \{(\gamma_{ij}) \in \mathrm{GL}(r,P)\colon \gamma_{ij} = 0 \quad (i > j) \text{ и } \gamma_{11} = \gamma_{22} = \ldots = \gamma_{rr} = 1\}.$$

Очевидно, $\mathrm{D}^+(r)\,\mathrm{N}(r, \mathbb{C})$ — линейная группа и

$$\mathrm{D}^+(r) \cap \mathrm{N}(r, \mathbb{C}) = 1, \ \mathrm{U}(r) \cap \mathrm{D}^+(r)\,\mathrm{N}(r, \mathbb{C}) = 1.$$

Следовательно, полученное выше разложение матрицы $(c_1, \ldots, c_r)$ единственно.

Рассуждая аналогично и в случае пространства $\mathbb{R}^r$, получаем следующий результат:

(6.6.1) *Всякий элемент группы* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ *может быть единственным способом записан в виде*

$$e \cdot [\lambda_1, \ldots, \lambda_r] \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $e \in \mathrm{U}(r)$ *и все* λ_i *положительны. Это определяет разложение* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ *как голоморфного многообразия в прямое произведение* $\mathrm{U}(r) \times \mathrm{D}^+(r) \times \mathrm{N}(r, \mathbb{C})$. *При этом многообразие* $\mathrm{U}(r)$ *компактно,* $\mathrm{D}^+(r)$ *биголоморфно* $\mathbb{R}^r$ *и* $\mathrm{N}(r, \mathbb{C})$ $\mathbb{C}$-*биголоморфно* $\mathbb{C}^{r(r-1)/2}$. *Аналогичное разложение для группы* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ *имеет вид*

$$\mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(r)\,\mathrm{D}^+(r)\,\mathrm{N}(r, \mathbb{R}).$$

Теперь нам понадобятся некоторые результаты об алгебре $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. Пусть $\mathfrak{S}(r)$ обозначает симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \ldots, r\}$. Для $\mu \in \mathfrak{S}(r)$ положим

$$\delta(\mu) = (\delta_{\mu(i)j}),$$

где $(\delta_{ij}) = 1_r$. Матрицы $\delta(\mu)$ называют *матрицами перестановки*. Очевидно, $\delta(\mu) \in \mathrm{O}(r)$ и

$$\delta(\mu\nu) = \delta(\mu)\,\delta(\nu) \quad (\mu, \nu \in \mathfrak{S}(r)).$$

Положим

$$\sigma(\mu) X = \delta(\mu) X \delta(\mu)^{-1} \text{ для } X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}).$$

Ясно, что так определенное преобразование $\sigma(\mu)$ есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$.

Обозначим через $\mathrm{sdiag}(r, P)$ множество всех диагональных матриц из $\mathfrak{sl}(r, P)$. Очевидно, $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{C})$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ и

(1) $\sigma(\mu)[\lambda_1, \ldots, \lambda_r] = [\lambda_{\mu(1)}, \ldots, \lambda_{\mu(r)}]$.

В частности, $\sigma(\mu)$ оставляет на месте алгебру $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{C})$. Пусть $\Delta(r)$ — совокупность всех корней алгебры $\mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$ относительно $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{C})$. При помощи отображения $\lambda \mapsto H_\lambda$ мы можем отождествить $\Delta(r)$ с некоторым подмножеством в $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{R})$:

$$\Delta(r) = \left\{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2r}(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \colon i \neq j\right\},$$

где $\varepsilon_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$ (i на i-м месте) (см. § 2.7), и, согласно упр. 1 § 5.2, группа Вейля совпадает с симметрической группой $\mathfrak{S}(r)$, стандартно действующей на $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{R})$. С учетом (1) легко видеть, что группа Вейля является ограничением группы $\sigma(\mathfrak{S}(r))$ на $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{R})$. Мы знаем также, что корневое подпространство $\mathbb{C}E_{\varepsilon_{ij}}$ совпадает с $\mathbb{C}E_{ij}$, где E_{ij} — матрица, у которой (i, j)-я компонента равна 1, а все остальные равны 0.

Для $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ положим

$$\mathfrak{n}(r, P) = \{(\xi_{ij}) \in \mathfrak{gl}(r, P) \colon \xi_{ij} = 0 \ (i \geqslant j)\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{n}(r, P)$ есть алгебра Ли группы $\mathrm{N}(r, P)$. Если ввести в $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{R})$ линейное упорядочение $\gg$, при котором $\pi_0(r) = \{\varepsilon_{i, i+1} \colon i = 1, \ldots, r-1\}$ будет совокупностью всех простых корней, то

$$\sum_{\beta \gg 0} \mathbb{C}E_\beta = \mathfrak{n}(r, \mathbb{C}).$$

Предположим, что $>$ — какое-либо другое упорядочение и $\pi(r)$ — совокупность всех простых корней относительно этого упорядочения. В силу (5.2.3), найдется перестановка $\mu \in \mathfrak{S}(r)$ (рассматриваемая как линейное преобразование в $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{C})$), для которой $\mu\pi(r) = \pi_0(r)$. Поскольку $\beta > 0$ влечет $\mu\beta \gg 0$ для $\beta \in \Delta(r)$, мы имеем

$$\sigma(\mu) \sum_{\beta > 0} \mathbb{C}E_\beta = \mathfrak{n}(r, \mathbb{C}).$$

Итак, справедлив такой результат:

(6.6.2) *Для любого упорядочения $>$ в $\Delta(r)$ существует такая перестановка $\mu \in \mathfrak{S}(r)$, что*

$$\sigma(\mu)\Big(\sum_{\beta > 0} \mathbb{C}E_\beta\Big) = \delta(\mu)\Big(\sum_{\beta > 0} \mathbb{C}E_\beta\Big)\delta(\mu)^{-1} = \mathfrak{n}(r, \mathbb{C}).$$

Теперь мы готовы к доказательству следующей теоремы:

(6.6.3) *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$ *и* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ — *ее разложение Ивасавы. Тогда существует такой элемент* $s \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, *что*

$$s\mathfrak{k}s^{-1} \subset \mathfrak{o}(r), \quad s\mathfrak{a}s^{-1} \subset \mathrm{sdiag}(r,\mathbb{R}), \quad s\mathfrak{n}s^{-1} \subset \mathfrak{n}(r,\mathbb{R}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Согласно (6.4.6), существует элемент $b \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, такой что

$$b\mathfrak{k}b^{-1} \subset \mathfrak{o}(r) \quad \text{и} \quad b\mathfrak{p}b^{-1} \subset \mathfrak{s}(r).$$

Поэтому мы будем предполагать в дальнейшем, что

(2) $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{o}(r)$ и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{s}(r)$.

Поскольку $\mathfrak{a}$ — абелева подалгебра в $\mathfrak{s}(r)$, можно найти такой элемент $u \in \mathrm{O}$, что $u\mathfrak{a}u^{-1} \subset \mathrm{sdiag}(r, \mathbb{R})$ (упр. 4 § 6.3). Тогда $u\mathfrak{k}u^{-1} \subset \mathfrak{o}(r)$ и $u\mathfrak{p}u^{-1} \subset \mathfrak{s}(r)$; поэтому мы можем предположить дополнительно, что

(3) $\mathfrak{a} \subset \mathrm{sdiag}(r, \mathbb{R})$.

Пусть $H_1, \ldots, H_h$ — какой-нибудь базис в $\mathfrak{a}$. Выберем $H_{h+1}, \ldots, H_{r-1}$ так, чтобы множество $\{H_1, \ldots, H_h, \ldots, H_{r-1}\}$ образовывало базис в $\mathrm{sdiag}(r, \mathbb{R})$. Положим $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \sqrt{-1}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(r, \mathbb{C})$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, содержащая $\mathfrak{a}$. Тогда

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} + \sum_{\gamma \in \Delta} \mathbb{C}X_\gamma,$$

где Δ — корневая система алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ и $[H, X_\gamma] = \gamma(H) X_\gamma$ для $H \in \mathfrak{h}$. Обозначим через Δ_+ совокупность всех корней $\gamma \in \Delta$, для которых

$$\gamma(H_1) = \ldots = \gamma(H_{t-1}) = 0,$$

$$\gamma(H_t) > 0 \text{ при некотором } t = 1, \ldots, h.$$

Как было показано в § 4.7,

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \cap \sum_{\gamma \in \Delta_+} \mathbb{C}X_\gamma.$$

Пусть $>$ — упорядочение в $\Delta(r)$, определяемое базисом $\{H_1, \ldots, H_{r-1}\}$. Пусть γ принадлежит Δ_+ и

$$X_\gamma = \sum_{i,j=1}^{r} \lambda_{ij} E_{ij}, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Применяя $\mathrm{ad}\, H$ $(H \in \mathfrak{a})$ к обеим частям равенства, получим

$$\sum \lambda_{ij} \gamma(H) E_{ij} = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} \varepsilon_{ij}(H) E_{ij}.$$

Следовательно, если $\lambda_{ij} \neq 0$, то $i \neq j$ и $\gamma(H) = \varepsilon_{ij}(H)$ для всех $H \in \mathfrak{a}$. В силу выбора упорядочения в $\Delta(r)$, $\varepsilon_{ij} > 0$. Поэтому $X_\gamma \in \sum_{\beta > 0} \mathbb{C} E_\beta$. Значит, согласно (6.6.2), найдется такая перестановка $\mu \in \mathfrak{S}(r)$, что

$$\sigma(\mu)\Big(\sum_{\gamma \in \Delta_+} \mathbb{C} X_\gamma\Big) \subset \mathfrak{n}(r, \mathbb{C}) \quad \text{и} \quad \sigma(\mu)\,\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}(r, \mathbb{R}).$$

С другой стороны, $\sigma(\mu)\,\mathfrak{k} \subset \mathfrak{o}(r)$ и $\sigma(\mu)\,\mathfrak{a} \subset \operatorname{sdiag}(r, \mathbb{R})$. □

Для того чтобы получить глобальный вариант теоремы (6.6.3), нам понадобятся некоторые подготовительные результаты.

(6.6.4) *Пусть A и B — связные линейные группы в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ *с алгебрами Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ соответственно. Если* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$, *то* $AB = BA$ *и AB — группа.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{a}$ и $Y \in \mathfrak{b}$. В силу формулы (6) § 6.1,

$$\exp X \cdot Y \cdot \exp(-X) = \exp(\operatorname{ad} X)\, Y = Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \ldots \in \mathfrak{b}$$

и

$$\exp X \cdot \exp Y \cdot \exp(-X) = \exp(\exp X \cdot Y \cdot \exp(-X)) \in \exp(\mathfrak{b}).$$

Поскольку $\exp(\mathfrak{a})$ порождает A, для $x \in A$ мы имеем $x \exp(\mathfrak{b})\, x^{-1} \subset \exp(\mathfrak{b})$, а поскольку $\exp(\mathfrak{b})$ порождает B, то $xBx^{-1} \subset B$. Следовательно, $AB = BA$ и AB — группа. □

(6.6.5) *Пусть G — связная линейная группа, K — компактная подгруппа, а H — замкнутая подгруппа в G. Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G, K и H соответственно. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h}$, то $G = KH = HK$.*

Доказательство. Пусть $\{x_j\}$ — произвольная последовательность в K, а $\{y_j\}$ — произвольная последовательность в H, и пусть $\lim x_j y_j = z \in G$. Поскольку K компактна, найдется такая подпоследовательность $\{x_{j'}\}$ последовательности $\{x_j\}$, что $\lim x_{j'} = x_0 \in K$. Тогда $\lim y_{j'} = x_0^{-1} z \in H$. Следовательно, $z \in KH$ и множество KH замкнуто в G.

Выберем теперь подпространство $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{h}$, такое что $\mathfrak{h} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{q}$, $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \cap \mathfrak{q} = 0$. Так как $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} = 0$. Поскольку отображение

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{q} \ni (X, Y) \longmapsto \exp X \exp Y \in G$$

биголоморфно в надлежащей окрестности точки $(0, 0)$, множество $\exp(\mathfrak{k})\exp(\mathfrak{q})$, содержащееся в $\exp(\mathfrak{k})\exp(\mathfrak{h})$, содержит неко-

торую окрестность единицы в G. Поэтому для любых $x \in K$ и $y \in H$ множество $x \exp(\mathfrak{k}) \exp(\mathfrak{h})\, y \subset KH$ является окрестностью точки xy в G. Следовательно, KH открыто.

Поскольку группа G связна, мы заключаем, что $G = KH$. $\square$

Теперь мы готовы к доказательству следующей теоремы:

(6.6.6) *Теорема.* *Пусть G — связная полупростая линейная группа в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$. *При подходящем выборе элемента* $s \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ *группа $s^{-1}Gs$ содержит замкнутые подгруппы*

$$K \subset \mathrm{O}(r), \quad A \subset D^+(r) \quad \text{и} \quad N \subset N(r, \mathbb{R}),$$

такие что всякий элемент x из $s^{-1}Gs$ может быть единственным образом записан в виде $x = x_1x_2x_3$ $(x_1 \in K,\ x_2 \in A,\ x_3 \in N)$, и это определяет биголоморфное отображение из G на $K \times A \times N$. Отметим, что экспоненциальные отображения в A и N биголоморфны.

Доказательство. Мы сохраняем обозначения из (6.6.3). Пусть K — группа, порожденная $\exp(\mathfrak{k})$. В силу (6.4.6), она замкнута в $\mathrm{O}(r)$ и компактна. Далее, так как отображение

$$\mathrm{diag}(r, \mathbb{R}) \ni [\lambda_1, \ldots, \lambda_s] \longmapsto [\exp\lambda_1, \ldots, \exp\lambda_r] \in D^+(r)$$

биголоморфно, то $A = \exp(\mathfrak{a})$ — замкнутая подгруппа в $\mathrm{D}^+(r)$. Согласно (6.5.5), $N = \exp(\mathfrak{n})$ — замкнутая подгруппа в $\mathrm{N}(r, \mathbb{R})$. Поскольку $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, множество AN является группой, в силу (6.6.4). Так как $\mathrm{D}^+(r)\,\mathrm{N}(r, \mathbb{R})$ как топологическое пространство есть прямое произведение $\mathrm{D}^+(r) \times \mathrm{N}(r, \mathbb{R})$, A замкнуто в $\mathrm{D}^+(r)$, а N замкнуто в $\mathrm{N}(r, \mathbb{R})$, то множество AN замкнуто. Следовательно, AN — линейная группа. Поскольку

$$\dim AN = \dim A + \dim N = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{n} = \dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{n}),$$

причем и $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{n}$ содержатся в алгебре Ли группы AN, мы видим, что алгебра Ли группы AN совпадает с $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$.

Так как $\mathfrak{k} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) = \mathfrak{g}$ и K компактна, то $G = KAN$, в силу (6.6.5). $\square$

Упражнение 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая подалгебра (над $\mathbb{C}$) алгебры $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ и G — комплексная линейная группа, порожденная $\exp(\mathfrak{g})$. Сформулировать и доказать утверждение о разложениях Ивасавы группы G в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Упражнение 2. Пусть $\mathbb{H}$ обозначает тело кватернионов, т. е. $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$ и $ki = j$. Установить теорему, аналогичную (6.6.1), для матриц над $\mathbb{H}$.

6.7. Построение линейной группы по алгебре Ли

Пусть $\mathfrak{l}$ — алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Согласно (1.10.1), у нее существует хотя бы одно точное представление. Целью настоящего параграфа является прямое доказательство следующей теоремы:

(6.7.1) *Для всякой алгебры Ли* $\mathfrak{l}$ *над* $\mathbb{R}$ *существует линейная группа* L, *алгебра Ли которой изоморфна* $\mathfrak{l}$.

Доказательство. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ и (V, f) — точное представление алгебры $\mathfrak{l}$. Выбирая в V подходящий базис, мы можем считать, что для всех $X \in \mathfrak{l}$

$$(1)\qquad f(X) = \begin{pmatrix} \overbrace{F_1(X)}^{r_1} & & & & * \\ & \overbrace{F_2(X)}^{r_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \overbrace{F_k(X)}^{r_k} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}),$$

где $F_1, \ldots, F_k$ — неприводимые представления алгебры $\mathfrak{l}$ размерностей $r_1, \ldots, r_k$ соответственно. Пусть L^* — группа, порожденная $\exp(f(\mathfrak{l}))$. Тогда для любого $X \in \mathfrak{l}$ матрицы $f(X)^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и $\exp(f(X))$ также имеют вид (1). Отсюда следует, что для всякого $a \in L^*$ мы имеем

$$(2)\qquad a = \begin{pmatrix} \overbrace{F_1(a)}^{r_1} & & & & * \\ & \overbrace{F_2(a)}^{r_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \overbrace{F_k(a)}^{r_k} \end{pmatrix} \in GL(r, \mathbb{C}).$$

Пусть f' — вполне приводимое представление алгебры $\mathfrak{l}$, ассоциированное с f:

$$(3)\qquad f'(X) \begin{pmatrix} F_1(X) & & & & * \\ & F_2(X) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & F_k(X) \end{pmatrix} \quad \text{для } X \in \mathfrak{l}.$$

Согласно (1.4.11), $F_i([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}])$ для каждого i является неприводимой полупростой алгеброй Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — максимальная полупростая подалгебра в $\mathfrak{l}$. В силу (3.5.3), $F_i([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]) = F_i(\mathfrak{g})$, т. е. каждое из представлений F_i определяет неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Поскольку всякое представление алгебры $\mathfrak{g}$ вполне приводимо (см. (3.4.4)), найдется элемент $s \in GL(r, \mathbb{C})$, такой что

$$(4) \quad f(X) = sf'(X)s^{-1} \text{ при } X \in \mathfrak{g}$$

(в силу теоремы Жордана—Гёльдера). Пусть G — группа, порожденная $\exp(f(\mathfrak{g}))$ в $GL(r, \mathbb{C})$. В силу (6.4.4), она замкнута.

Для $a \in L^*$ положим

$$(5) \quad f'(a) = \begin{pmatrix} F_1(a) & & & & 0 \\ & F_2(a) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & F_k(a) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $a \mapsto f'(a)$ — гомоморфизм групп. Из (4) вытекает, что

$$(6) \quad a = sf'(a)s^{-1} \text{ для } a \in G.$$

Далее, пусть $\mathfrak{n}$ — радикал алгебры $\mathfrak{l}^{(1)} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. Так как $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{l}^{(1)}$, то $\mathfrak{l}^{(1)} = \mathfrak{g} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{n} = 0$, согласно (3.5.3), 2). Из доказательства теоремы (2.1.7) следует, кроме того, что $f'(\mathfrak{n}) = 0$. Поэтому $N = \exp f(\mathfrak{n})$ есть линейная группа, в силу (6.5.5), и

$$f'(b) = 1 \text{ для } b \in N.$$

Ввиду (6.5.5), GN является группой, ибо $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, а поскольку $f'(N) = 1$, из (6) вытекает, что $G \subset N = 1$. Таким образом, отображение $G \times N \ni (a, b) \mapsto ab \in GN$ взаимно-однозначно и голоморфно. С другой стороны, $sf'(ab)s^{-1} = sf'(a)s^{-1} = a$ и отображение $ab \mapsto a$ непрерывно, а потому непрерывно и отображение $ab \mapsto b$. Следовательно, группа GN гомеоморфна $G \times N$; в частности, она локально-компактна.

Покажем, что всякая локально-компактная подгруппа A группы Ли обязательно замкнута. Поскольку A локально-компактна, она открыта в своем замыкании $\overline{A}$. Далее, дополнение $\overline{A}/A$ группы A в $\overline{A}$ есть объединение классов смежности вида cA ($c \in \overline{A} \setminus A$) и потому открыто в $\overline{A}$. Следовательно, A замкнута в $\overline{A}$, а значит, $A = \overline{A}$.

Итак, $GN = L^{(1)}$ — линейная группа. Ее алгеброй Ли будет, очевидно, $\mathfrak{l}^{(1)} = \mathfrak{g} + \mathfrak{n}$.

Пусть $\dim \mathfrak{l}/\mathfrak{l}^{(1)} = p$. Выберем такие элементы $E_1, \ldots, E_p$, что $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^{(1)} + \mathbb{R}E_1 + \ldots + \mathbb{R}E_p$. Если, как обычно, $[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$ обозначает диагональную матрицу с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, то, полагая для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

$$f_1(\mathfrak{l}^{(1)} + \lambda_1 E_1 + \ldots + \lambda_p E_p) = [\lambda_1, \ldots, \lambda_p] \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{C}),$$

мы получим некоторое представление алгебры $\mathfrak{l}$. Обозначим через $\tilde{f}$ сумму представлений f и f_1.

Так как $\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto \exp \tilde{f}(\lambda E_1) \longmapsto \exp \lambda$ есть последовательность двух непрерывных взаимно-однозначных отображений и $\lambda \longmapsto \exp \lambda$ — гомеоморфизм, то множество $\exp \tilde{f}(\mathbb{R}E_i) = H_i$ гомеоморфно $\mathbb{R}$ и потому локально-компактно. Следовательно, H_i — замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(r + p, \mathbb{C})$.

Обозначим теперь через $\tilde{L}^{(1)}$ группу, порожденную $\exp \tilde{f}(\mathfrak{l}^{(1)})$. Ясно, что

$$\tilde{L}^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_p \end{pmatrix} : a \in L^{(1)} \right\}$$

и что $\tilde{L}^{(1)}$ замкнута в $\mathrm{GL}(r + p, \mathbb{C})$. Из включения $[E_1, \mathfrak{l}^{(1)}] \subset \mathfrak{l}^{(1)}$ следует, что $H_1\tilde{L}^{(1)}$ — группа (снова в силу (6.6.4)). Поэтому, используя равенство

$$\exp \tilde{f}(\lambda E_1) = \begin{bmatrix} \exp f(\lambda E_1) & & 0 \\ & \exp \lambda & \\ 0 & & 1_{p-1} \end{bmatrix},$$

легко проверить, что $\tilde{L}^{(1)} \cap H_1 = 1$, отображение $\tilde{L}^{(1)} \times H_1 \ni (c, d) \longmapsto cd \in \tilde{L}^{(1)} H_1$ — гомеоморфизм и группа $\tilde{L}^{(1)} H$ замкнута.

Аналогичные рассуждения показывают, что $L = \tilde{L}^{(1)} H_1 \ldots H_p$ — замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(r + p, \mathbb{C})$, гомеоморфная $\tilde{L}^{(1)} \times H_1 \times \ldots \times H_p = \tilde{L}^{(1)} \times \mathbb{R}^p$, и алгебра Ли группы $\bar{L}$ совпадает с $\tilde{f}(\mathfrak{l})$. □

Модифицируя это доказательство, нетрудно получить следующее утверждение:

(6.7.2) *Для всякой алгебры Ли* $\mathfrak{l}$ *над* $\mathbb{C}$ *существует комплексная линейная группа* L, *алгебра Ли которой изоморфна* $\mathfrak{l}$.

Чтобы двигаться дальше, нам необходим такой результат:

(6.7.3) *Пусть* A — *компактная подгруппа в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. *Тогда существует элемент* $s \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, *для которого* $sAs^{-1} \subset \mathrm{U}(r)$. *При этом, если* $A \subset \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, *то можно подобрать* s *в* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, *такое что* $s A s^{-1} \subset \mathrm{O}(r)$.

(Это сразу следует из существования меры Хаара; см. [Шевалле] и [Понтрягин].)

(6.7.4) *Для всякой компактной алгебры Ли $\mathfrak{v}$ существует компактная линейная группа V, алгебра Ли которой изоморфна $\mathfrak{v}$. Обратно, алгебра Ли всякой компактной линейной группы компактна.*

Доказательство. Как мы видели в § 4.3, $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{u}$ — некоторый компактный полупростой идеал, а $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{v}$.

Поскольку алгебра $\mathfrak{u}$ полупроста, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ — линейная группа (см. (6.2.4.)). Так как $\mathfrak{u}$ компактна, то существует скалярное произведение φ на $\mathfrak{u}$, инвариантное относительно $\mathfrak{u}$. Пусть $\{E_1, \ldots, E_r\}$ — базис в $\mathfrak{u}$, для которого $\varphi(E_i, E_j) = \delta_{ij}$. При таком выборе базиса $\mathrm{ad}(\mathfrak{u})$ можно отождествить с некоторой подалгеброй в $\mathfrak{o}(r)$. Следовательно, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u}) \subset \mathrm{O}(r)$, и, поскольку группа $\mathrm{O}(r)$ компактна, группа $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ также компактна.

Пусть $\dim z = p$. Тогда множество V всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(r+p, \mathbb{C}),$$

где $a \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ и

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} = [\exp(\sqrt{-1}\lambda_1), \ldots, \exp(\sqrt{-1}\lambda_p)]$$

$$\text{при } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R},$$

является компактной линейной группой и ее алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{v}$.

Обратное очевидно в силу (6.7.3). □

Упражнение 1. Пусть в доказательстве теоремы (6.7.1) элементы $E_1, \ldots, E_p$ принадлежат радикалу алгебры $\mathfrak{l}$. Показать, что существует линейная группа R, гомеоморфная $\mathbb{R}^q$, алгебра Ли которой совпадает с радикалом алгебры L. Кроме того,

$$L = \widetilde{G}R, \quad \widetilde{G} \cap R = 1$$

и L биголоморфна $\widetilde{G} \times R$, где $\widetilde{G}$ — линейная группа, порожденная $\exp \mathfrak{f}(\mathfrak{g})$. Это дает глобальный вариант теоремы (3.5.1).

Упражнение 2. Связная линейная группа с компактной алгеброй Ли может не быть компактной. [*Указание*: найдите абелеву некомпактную линейную группу.]

6.8. Флаговые многообразия

В этом параграфе нам понадобится понятие *факторпространства* линейной группы. Пусть $G \subset L$ — замкнутые подгруппы в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Обозначим через L/G совокупность всех левых классов смежности: $L/G = \{aG : a \in L\}$, и через π — естественную проекцию $L \ni a \mapsto aG \in L/G$. Мы называем подмножество B в L/G *открытым*, если существует открытое множество A в L, для которого $\pi(A) = B$. Легко видеть, что L/G становится

хаусдорфовым пространством при таком определении семейства открытых множеств и что отображение

$$L \times L/G \ni (a,\ b\ G) \mapsto abG \in L/G$$

непрерывно и открыто.

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{l}$ — алгебры Ли групп G и L соответственно. Выберем подпространство $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{l}$, такое что $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p} = 0$. Как и при доказательстве теоремы (6.1.3), можно найти такие окрестности $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{p}_0'$ нуля в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{p}$ соответственно, что отображение

$$\mathfrak{p}_0' \times \mathfrak{g}_0 \ni (X, Y) \mapsto \exp X \cdot \exp Y \in L$$

биголоморфно и $(\exp(\mathfrak{p}_0') \exp(\mathfrak{g}_0)) \cap G = \exp(\mathfrak{g}_0)$. Подберем окрестность $\mathfrak{p}_0 = -\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_0'$ нуля в $\mathfrak{p}$, настолько малую, чтобы $(\exp(\mathfrak{p}_0))^2 \subset \exp(\mathfrak{p}_0') \exp(\mathfrak{g}_0)$. Тогда $(\exp(\mathfrak{p}_0))^2 \cap G = 1$, откуда следует, что отображение

$$\mathfrak{p}_0 \ni X \to \pi(\exp X) \in L/G$$

взаимно-однозначно и является гомеоморфизмом на некоторую окрестность элемента $\pi(1)$ в L/G. Следовательно, используя отображение, обратное к отображению $\mathfrak{p}_0 \ni X \mapsto a\pi(\exp X)$, мы можем ввести локальную систему координат в окрестности $\pi(a \exp(\mathfrak{p}_0))$ элемента $\pi(a)$. Отпуская подробное доказательство, сформулируем следующую теорему (читатель может обратиться к книге [Шевалле]):

(6.8.1) *Пусть L — линейная группа и G — ее замкнутая подгруппа. Тогда факторпространство L/G обладает голоморфной структурой, согласованной с топологией факторпространства и такой, что L является голоморфным расслоением над L/G (т. е. L локально устроено как прямое произведение L/G на G и отображение $L \times L/G \ni (a,\ b\ G) \mapsto abG \in L/G$ голоморфно).*

В случае когда L и G комплексны, L/G будет $\mathbb{C}$-голоморфным многообразием, и мы можем заменить в приведенном выше утверждении «голоморфный» на «$\mathbb{C}$-голоморфный».

Теперь нам нужен следующий результат:

(6.8.2) *Пусть G — линейная группа, K и H — ее замкнутые подгруппы. Если K компактна и $G = KH$, то отображение $K/K \cap H \ni a(K \cap H) \mapsto aH \in G/H$ сюръективно и биголоморфно (это можно записать так: $KH/H \cong K/(K \cap H)$).*

Доказательство. Отображение $K \ni a \mapsto aH \in G/H$ непрерывно и сюръективно и индуцирует взаимно-однозначное отображение ψ из $K/(K \cap H)$ на G/H. Поскольку группа $K/(K \cap H)$ компактна, ψ — является гомеоморфизмом.

Обозначим через $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G, K и H соответственно. Тогда алгеброй Ли группы $K \cap H$ будет $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ и

$$\dim \mathfrak{k} - \dim (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim G/H.$$

Следовательно, $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{k} + \dim \mathfrak{h} - \dim (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h}$. Выберем подпространство $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{k}$, такое что $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{p}$ и $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p} = 0$. Тогда имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 0$. Поэтому для достаточно малой окрестности $\mathfrak{p}_0$ нуля в $\mathfrak{p}$ и для любого $a \in K$ оба отображения $\mathfrak{p}_0 \ni X \longmapsto a \exp X \cdot H \in G/H$ и $\mathfrak{p}_0 \ni X \longmapsto a \exp X \times (K \cap H) \in K/K \cap H$ биголоморфны. □

Пусть $\mathrm{P}(r)$ обозначает совокупность всех верхне-треугольных матриц из $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Ясно, что $P(r)$ — алгебраическая группа и ее алгебра Ли $\mathfrak{p}(r)$ совпадает с множеством всех верхне-треугольных матриц. Пусть, далее, $\mathrm{U}(r)$ — группа всех унитарных матриц из $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(r)$ — алгебра Ли группы $\mathrm{U}(r)$ и $\mathrm{T}(r)$ — подгруппа в $\mathrm{U}(r)$, состоящая из всех диагональных матриц $[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r]$ с $|\varepsilon_1| = \ldots = |\varepsilon_r| = 1$.
Тогда

$$\mathrm{T}(r) = \mathrm{U}(r) \cap \mathrm{P}(r).$$

Для каждой матрицы $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ зададим матрицу $Y = (y_{ij})$, полагая $y_{ij} = x_{ij}$ $(i > j)$ и $y_{ij} = 0$ $(i \leqslant j)$. Тогда $Y - {}^t\overline{Y} \in \mathfrak{u}(r)$ и $X - (Y - {}^t\overline{Y}) \in \mathfrak{p}(r)$. Следовательно, $\mathfrak{u}(r) + \mathfrak{p}(r) = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$. Так как группа $\mathrm{U}(r)$ компактна, то

$$\mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(r)\,\mathrm{P}(r),$$

в силу (6.6.5), и многообразия $\mathrm{F}(r) = \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})/\mathrm{P}(r)$ и $\mathrm{U}(r)/\mathrm{T}(r)$ биголоморфны, в силу (6.8.2). Так как группа $\mathrm{P}(r)$ алгебраична и комплексна, то $\mathrm{F}(r)$ есть $\mathbb{C}$-голоморфное многообразие, и притом компактное, ибо $\mathrm{U}(r)/\mathrm{T}(r)$ компактно.

Пусть теперь $\mathfrak{q}(r)$ обозначает совокупность всех нижне-треугольных матриц с нулевыми элементами на диагонали. Ясно, что $\mathfrak{q}(r)$ — нильпотентная алгебра Ли и

$$\mathrm{Q}(r) = \exp(\mathfrak{q}(r)) = \{1 + X : X \in \mathfrak{q}(r)\}$$

— алгебраическая группа в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Далее, для всякого $a = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ положим

$$\eta(a) = \prod_{j=1}^{n-1} \det \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{j1} \ldots a_{jj} \end{pmatrix}$$

и

$$\mathrm{I}(r) = \{a \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) : \eta(a) = 0\}.$$

Очевидно, $\mathrm{I}(r)\,\mathrm{P}(r) = \mathrm{I}(r)$,

(6.8.3) 1) $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) = \mathrm{Q}(r)\,\mathrm{P}(r) \cup I(r)$ (*дизъюнктное объединение*).

2) $\mathrm{I}(r)\,\mathrm{P}(r) = \mathrm{I}(r)$.

3) *Всякая матрица* $a = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \setminus \mathrm{I}(r)$ *может быть единственным образом записана в виде*

$$a = \mu(a)\,\lambda(a), \text{ где } \mu(a) \in \mathrm{Q}(r),\ \lambda(a) \in \mathrm{P}(r),$$

причем элементы матриц $\mu(a)$ *и* $\lambda(a)$ *суть рациональные функции от* a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, r)$.

Доказательство. Проведем индукцию по r. Случай $r = 1$ тривиален.

Пусть a, b, c, и d — матрицы размера $(r-1) \times (r-1)$, $(r-1) \times 1$, $1 \times (r-1)$ и 1×1 соответственно. Если $\det a \neq 0$, то

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{r-1} & 0 \\ ca^{-1} & 1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_{r-1} & 0 \\ ca^{-1} & 1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{r-1} & a^{-1}b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix};$$

далее, если $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin \mathrm{I}(r)$, то $a \notin \mathrm{I}(r-$.

Тем самым мы свели дело к случаю $r - 1$. □

Замечание. Разложение из (6.8.3) является частью *разложения Брюа*

$$\mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) = \bigcup_s \mathrm{Q}(r)\, s\mathrm{P}(r) \quad \text{(дизъюнктное объединение)},$$

где s пробегает все матрицы перестановки (определенные в § 6.6).

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k > 0$ — совокупность всех положительных корней относительно некоторого фиксированного упорядочения. Пусть $H_1, \ldots, H_l$ — базис в $\mathfrak{h}$ и $\{E_{\pm\beta_i}\colon i = 1, \ldots, k\}$ — базис Вейля (см. § 5.1) алгебры $\mathfrak{g}$ по модулю $\mathfrak{h}$. Положим

$$X_i = E_{\beta_i}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$X_{k+j} = H_j, \quad j = 1, \ldots, l,$$

$$X_{k+l+i} = E_{-\beta_{k-i+1}}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда $\{X_1, \ldots, X_r\ (r = l + 2k)\}$ — базис в $\mathfrak{g}$. Для удобства будем отождествлять $\delta \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ с матрицей $D \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$, пред-

ставляющей δ в базисе $X_1, \ldots, X_r$. Кроме того, для всякой подалгебры Ли $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ будем использовать обозначения

$$\mathrm{ad}(\mathfrak{m}) = \{\mathrm{ad}\, X : X \in \mathfrak{m}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}),$$

$\mathrm{Ad}(\mathfrak{m})$ — подгруппа в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, порожденная $\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{m}))$.

Положим

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \sum_{\beta>0} \mathbb{C}E_\beta, \quad \mathfrak{q} = \sum_{\beta>0} \mathbb{C}E_{-\beta}.$$

Ясно, что $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — подалгебры в $\mathfrak{g}$ и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p} = 0, \quad \mathrm{ad}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{q}(r), \quad \mathrm{ad}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}(r).$$

Поскольку $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ — алгебраическая группа в $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, ее компонента единицы $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ также является алгебраической группой, по известной теореме алгебраической геометрии.

(6.8.4) $\mathrm{Ad}(\mathfrak{q})$ *и* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$ — *алгебраические группы, и*

$$\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{q}) \cdot \mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) \cup I \quad (\textit{дизъюнктное объединение}),$$

$$I \cdot \mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) = I,$$

где

$$I = \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{I}(r).$$

($\mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$ называется *подгруппой Бореля в* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$.)

Доказательство. Функция η $\mathbb{C}$-голоморфна на $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ и, очевидно, не равна нулю тождественно. Следовательно, $I = \{a \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) : \eta(a) = 0\}$ имеет (топологическую) размерность, не большую чем $\dim \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) - 2$. Следовательно, множество $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \setminus I$ связно.

Пусть a принадлежит $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \setminus I$. Тогда a можно записать в виде

$$a = \mu(a)\lambda(a), \text{ где } \mu(a) \in \mathrm{Q}(r), \ \lambda(a) \in \mathrm{P}(r).$$

Пусть f — многочлен от n^2 переменных, равный нулю на алгебраической группе $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. Если матрица $a = (a_{ij})$ достаточно близка к 1, то

$$a = \exp(\mathrm{ad}\, X) \cdot \exp(\mathrm{ad}\, Y), \quad X \in \mathfrak{q}, \ Y \in \mathfrak{p}.$$

Следовательно, $\mu(a) = \exp(\mathrm{ad}\, X)$ и $f(\mu(a)) = 0$. Поскольку $f \circ \mu$ — рациональная функция от a_{ij} и множество $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \setminus I$ связно, мы заключаем, что $f(\mu(a)) = 0$ для всех $a \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \setminus I$, а значит, $\mu(a) \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. Аналогично $\lambda(a) \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. Положим

$$\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Q}(r) = Q, \quad \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{P}(r) = P.$$

Тогда $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \setminus I = QP$, где Q и P — алгебраические группы, содержащие $\mathrm{Ad}(\mathfrak{q})$ и $\mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$ соответственно. Так как пространство $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) \setminus I$ связно и QP гомеоморфно $Q \times P$, то Q и P связны и

$Q = \mathrm{Ad}(\mathfrak{q})$, $P = \mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$. Далее, из равенства $\mathrm{I}(r)\,\mathrm{P}(r) = \mathrm{I}(r)$ следует, что $I \cdot \mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{I}(r) \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = I$. □

Рассмотрим компактную вещественную форму $\mathfrak{u}$ алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{u} + \mathfrak{t} + \sum_j \mathbb{R}(E_{\beta_j} + E_{-\beta_j}) + \mathbb{R}i(E_{\beta_j} - E_{-\beta_j}) \quad \mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_r.$$

Поскольку $\mathfrak{u}$ компактна и полупроста, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ — компактная группа (это вытекает из доказательства теоремы (6.7.4)), и легко видеть, что $\mathfrak{u} + \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. В силу (6.6.5) и (6.8.2), имеем

$$\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{u}) \cdot \mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$$

и

$$\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})/(\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})).$$

Докажем, что $\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{u}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$. Так как алгебра $\mathfrak{t}$ коммутативна, то $\mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$ — абелева группа, а значит, абелевой группой будет и ее замыкание. Согласно (6.1.6), алгебра Ли $\mathfrak{t}'$ этого замыкания абелева. Так как $\mathfrak{t}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{u}$, то $\mathfrak{t}' = \mathrm{ad}(\mathfrak{t})$ и группа $\mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$ замкнута. Поскольку $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ компактна, то и $\mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$ компактна. С другой стороны, $\mathrm{ad}\left(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{C}E_{\beta_j}\right)$ — алгебра Ли, состоящая из нильпотентных линейных преобразований, и

$$\mathrm{Ad}\left(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{C}E_{\beta_j}\right) = \exp\left(\mathrm{ad}\left(\sum_{j=1}^{k} \mathbb{C}E_{\beta_j}\right)\right)$$

не содержит компактных подгрупп. Легко видеть, что

$$\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{t}) \cdot \mathrm{Ad}\left(\sum \mathbb{C}E_{\beta_j}\right), \quad \mathrm{Ad}(\mathfrak{t}) \cap \mathrm{Ad}\left(\sum \mathbb{C}E_{\beta_j}\right) = 1.$$

Поэтому $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u}) \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$ — компактная группа, содержащая $\mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$. Следовательно, $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u}) \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$.

Определение. Для всякой компактной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{u}$

$$\mathrm{F}(\mathfrak{u}) = \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})/\mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$$

называется *флаговым многообразием*.

$\mathrm{F}(\mathfrak{u})$ является компактным $\mathbb{C}$-голоморфным многообразием, поскольку оно биголоморфно $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$.

Теперь нам понадобится следующая лемма:

(6.8.5) *Пусть M — связное дифференцируемое многообразие и S — замкнутое подмножество в M, такое что* $\dim S \leqslant \dim M - 2$ *Пусть, далее, p принадлежит $M \setminus S$ и γ:* $[0, 1] \to M$ *— непрерывная кривая, удовлетворяющая условию* $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.

Тогда найдется кривая γ', гомотопная γ, которая лежит в $M \setminus S$ и также удовлетворяет условию $\gamma'(0) = \gamma'(1) = p$. (См. [Хелгасон].)

(6.8.6) *Теорема*. *Всякое флаговое многообразие* $\mathrm{F}(\mathfrak{u})$ *односвязно.*

Доказательство. $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ является расслоением с базой $\mathrm{F}(\mathfrak{u})$ и типичным слоем $\mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$. Поскольку $I \cdot \mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) = I$, I есть ограничение этого расслоения. Обозначим через I^* базу этого ограничения: $I^* = \{a\,\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{F}(\mathfrak{u}) : a \in I\}$. Так как $\dim I \leqslant \dim f(\mathfrak{u}) - 2$, то

$$\dim I^* = \dim I - \dim \mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) \leqslant \dim \mathrm{F}(\mathfrak{u}) - 2.$$

Поскольку $\mathrm{F}(\mathfrak{u}) = (\mathrm{Ad}(\mathfrak{q})\,\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}))/\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}) \cup I^*$ (дизъюнктное объединение) и I^* замкнуто в $\mathrm{F}(\mathfrak{u})$, а кроме того, многообразие $(\mathrm{Ad}(\mathfrak{q})\,\mathrm{Ad}(\mathfrak{p}))/\mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$ биголоморфно $\mathfrak{q}$ и односвязно, мы заключаем на основании (6.8.5), что $\mathrm{F}(\mathfrak{u})$ односвязно. $\square$

Упражнение. $\mathrm{F}(\mathfrak{su}(2))$ — двумерная сфера.

6.9. Теоремы Вейля о компактных группах Ли

В этом параграфе нам потребуются некоторые элементарные сведения о группах Ли. Все необходимые определения и результаты читатель может найти в [Шевалле], и мы не будем каждый раз делать ссылку на эту книгу. Все результаты данного параграфа по существу принадлежат Г. Вейлю.

Мы знаем, что $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ — единственная с точностью до эквивалентности комплексная простая алгебра Ли ранга 1. Поскольку $\mathfrak{su}(2)$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, она является единственной компактной (полу)простой алгеброй Ли размерности 3, или ранга 1. Связная линейная группа, соответствующая $\mathfrak{su}(2)$, — это группа

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1\right\},$$

гомеоморфная единичной сфере в $\mathbb{C}^2$ или $\mathbb{R}^4$ и односвязная. Сделаем еще одно замечание по поводу группы $\mathrm{SU}(2)$. Для любого X из $\mathfrak{su}(2)$ группа $\exp(\mathbb{R}X)$ компактна. В самом деле, замыкание группы $\exp(\mathbb{R}X)$ — компактная связная абелева группа, но всякая абелева подалгебра в $\mathfrak{su}(2)$ имеет размерность $\leqslant 1$.

(6.9.1) (Г. Вейль) *Пусть* $\mathfrak{u}$ — *компактная полупростая алгебра Ли и* $\widetilde{U}$ — *универсальная накрывающая группы* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$. *Тогда группа* $\widetilde{U}$ *компактна.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon \tilde{U} \to \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ — накрывающий гомоморфизм. Обозначим через $\tilde{T}$ компоненту единицы в $\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\mathfrak{t}))$, где $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{u}$ и $\mathrm{Ad}(\mathfrak{t}) = \{\exp(\mathrm{ad}\, X)\colon X \in \mathfrak{t}\}$. Тогда $\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\mathfrak{t}))/T$ — дискретная группа и

$$\tilde{U}/\tilde{T} \to \tilde{U}/\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\mathfrak{t})) \cong \mathrm{Ad}(u)/\mathrm{Ad}(\mathfrak{t}) = \mathrm{F}(\mathfrak{u})$$

— накрывающее отображение. Поскольку $\mathrm{F}(\mathfrak{u})$ односвязно, это отображение должно быть взаимно-однозначным и $\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\mathfrak{t})) = \tilde{\mathrm{T}}$.

Пусть exp обозначает экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{u}$ в группу Ли $\tilde{U}$. Тогда $\tilde{T} = \exp(\mathfrak{t})$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — базис корневой системы алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Тогда

$$\mathfrak{t} = \mathbb{R}\sqrt{-1}H_{\alpha_1} + \cdots + \mathbb{R}\sqrt{-1}H_{\alpha_l}$$

и

$$\exp(\mathfrak{t}) = \exp\left(\mathbb{R}\sqrt{-1}H_{\alpha_1}\right)\ldots\exp\left(\mathbb{R}\sqrt{-1}H_{\alpha_l}\right).$$

Пусть $\{E_\beta\}$ — базис Вейля. Тогда для любого корня β

$$\mathfrak{u}_\beta = \mathbb{R}\sqrt{-1}H_\beta + \mathbb{R}(E_\beta + E_{-\beta}) + \mathbb{R}\sqrt{-1}(E_\beta - E_{-\beta})$$

есть простая алгебра Ли и $\mathfrak{u}_\beta \cong \mathfrak{su}(2)$. Обозначим через U_β аналитическую подгруппу в $\tilde{U}$, соответствующую $\mathfrak{u}_\beta$. Существует непрерывный гомоморфизм из SU (2) на U_β. Следовательно, группа $\exp\left(\mathbb{R}\sqrt{-1}\,\mathrm{H}_\beta\right)$, как непрерывный образ однопараметрической подгруппы в SU (2), компактна. Поэтому каждая из групп $\exp\left(\mathbb{R}\sqrt{-1}\,H_{\alpha_i}\right)$ компактна и, значит, $\exp(\mathfrak{t})$ компактна. Поскольку факторгруппа $\tilde{U}/\exp(\mathfrak{t}) = \mathrm{F}(\mathfrak{u})$ также компактна, компактна и группа $\tilde{U}$. $\square$

Заметим, что теорема (6.9.1) допускает такую переформулировку:

(6.9.2) *Всякая связная группа Ли, имеющая компактную полупростую алгебру Ли, компактна.*

Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная полупростая алгебра Ли размерности r, и пусть σ принадлежит $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$. Поскольку ортицательно-определенная форма Киллинга инвариантна относительно линейного преобразования σ, это преобразование полупросто. Обозначим через $\mathfrak{u}(\sigma, 1)$ собственное подпространство линейного преобразования σ, отвечающее собственному значению 1: $\mathfrak{u}(\sigma, 1) = \{X \in \mathfrak{u}\colon \sigma X = X\}$. Как и в (5.3.4), имеем

$$\dim \mathfrak{u}(\sigma, 1) \geqslant \mathrm{rank}\, \mathfrak{u} = l.$$

Мы будем называть σ *регулярным*, если $\dim \mathfrak{u}(\sigma, 1) = l$. Пусть $\chi(\xi, \sigma)$ — характеристический многочлен преобразования σ. Имеем

$$\chi(\xi, \sigma) = \det(\xi 1 - \sigma) = (\xi - 1)^r + \chi_{r-1}(\sigma)(\xi - 1)^{r-1} + \cdots + \chi_l(\sigma)(\xi - 1)^l.$$

Следовательно, автоморфизм σ регулярен тогда и только тогда, когда $\chi_l(\sigma) \neq 0$. Поскольку χ_l — голоморфная функция, не равная тождественно нулю на связном многообразии $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, множество всех регулярных элементов открыто и плотно в $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$.

(6.9.3) *Совокупность всех регулярных элементов группы* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ *образует открытое плотное подмножество. Для любого регулярного элемента* $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ *подпространство* $\mathfrak{u}(\sigma, 1)$ *является подалгеброй Картана в* $\mathfrak{u}$ *и* $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u}(\sigma, 1))$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{m} = (\sigma - 1)\mathfrak{u}$. Тогда

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\sigma, 1) \oplus \mathfrak{m}.$$

Рассмотрим комплексификацию алгебры $\mathfrak{u}$:

$$\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}(\sigma, 1)^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}.$$

Ясно, что σ можно продолжить до автоморфизма алгебры $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, который мы также обозначим через σ, и $\sigma\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Следовательно, $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ разлагается на собственные подпространства:

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(\sigma, \lambda) + \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(\sigma, \mu) + \cdots, \text{ где } \lambda \neq 1,\ \mu \neq 1, \ldots .$$

Так как $\mathfrak{u}(\sigma, 1)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(\sigma, 1)$, то $[\mathfrak{u}(\sigma, 1)^{\mathbb{C}}, \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(\sigma, \lambda)] \subset \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(\sigma, \lambda)$, в силу (4.4.3), 2). Поэтому

$$[\mathfrak{u}(\sigma, 1), \mathfrak{u}(\sigma, 1)] \subset \mathfrak{u}(\sigma, 1),\ [\mathfrak{u}(\sigma, 1), \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

Пусть X — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{u}(\sigma, 1)$. Тогда

$$\mathfrak{u}(\sigma, 1) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

где $\mathfrak{a}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{u}(\sigma, 1)$, содержащая X, а $\mathfrak{n} = (\mathrm{ad}\, X)\,\mathfrak{u}(\sigma, 1)$. Таким образом, имеем

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m},$$

где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$ инвариантны относительно σ и $\mathrm{ad}\, X$. Поскольку $X \in \mathfrak{u}(\sigma, 1)$, т. е. $\sigma X = X$, то $\sigma \circ \mathrm{ad}\, X = \mathrm{ad}\, X \circ \sigma$. Положим

$$\sigma(\lambda) = \sigma \exp \lambda(\mathrm{ad}\, X),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Так как преобразование $\sigma - 1\,|_{\mathfrak{m}}$ невырожденно, то и $\sigma(\lambda) - 1\,|_{\mathfrak{m}}$ невырожденно, если λ достаточно близко к 0. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_h$ — собственные значения сужения преобразования $\mathrm{ad} X$ на $\mathfrak{n}^{\mathbb{C}}$. Выберем λ так, чтобы $|\zeta_j \lambda| < 2\pi$ для $j = 1, \ldots, h$. Тогда

преобразование $\exp \lambda (\operatorname{ad} X) - 1$ невырожденно на $\mathfrak{n}$. Следовательно, найдется $\lambda \neq 0$, для которого $\mathfrak{u}(\sigma(\lambda), 1) = \mathfrak{a}$. Из регулярности σ следует, что $\mathfrak{u}(\sigma, 1) = \mathfrak{a}$. Поэтому алгебра $\mathfrak{u}(\sigma, 1)$ абелева и $\dim \mathfrak{u}(\sigma, 1) = l$. Следовательно, $\mathfrak{u}(\sigma, 1)$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{u}$.

С другой стороны, если $(\sigma - 1)\mathfrak{t} = 0$ для некоторой подалгебры Картана $\mathfrak{t}$, то $\sigma \in \exp(\operatorname{ad}(\mathfrak{t}))$, в силу упражнения к § 5.4. ▯

(6.9.4) *Пусть L — связная линейная группа и $\mathfrak{l}$ — ее алгебра Ли. Для $x \in L$ имеем $x\mathfrak{l}x^{-1} = \mathfrak{l}$; положим $(\operatorname{Ad} x) Y = xYx^{-1}$ для $Y \in \mathfrak{l}$. Тогда $x \mapsto \operatorname{Ad} x$ есть гомоморфизм из L на $\operatorname{Ad}(\mathfrak{l})$. Ядро этого гомоморфизма (присоединенного представления) группы L совпадает с ее центром.*

Доказательство. Для X и Y из $\mathfrak{l}$

$$\exp X \cdot Y \cdot \exp(-X) = \exp(\operatorname{ad} X)\, Y \in \mathfrak{l}.$$

Пусть x принадлежит L. Тогда существуют такие элементы $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{l}$, что $x = \exp X_1 \ldots \exp X_k$. Следовательно, $(\operatorname{Ad} x)\, Y = \exp(\operatorname{ad} X_1) \ldots \exp(\operatorname{ad} X_k)\, Y \in \mathfrak{l}$ и $\{\operatorname{Ad} x : x \in L\}$ совпадает с группой, порожденной $\exp \operatorname{ad}(\mathfrak{l})$, т. е. с $\operatorname{Ad}(\mathfrak{l})$.

Если $\operatorname{Ad} x = 1$, то $xYx^{-1} = Y$ и, значит, $x \exp Y x^{-1} = \exp Y$ для всех $Y \in \mathfrak{l}$. Так как $\exp(\mathfrak{l})$ порождает L, то x принадлежит центру L. Обратно, если x принадлежит центру L, то для любого Y из $\mathfrak{l}$ имеем $x \exp \lambda Y x^{-1} = \exp \lambda Y$. Дифференцируя обе части по λ при $\lambda = 0$, получим $xYx^{-1} = Y$. Следовательно, ядро присоединенного представления совпадает с центром группы L. ▯

Пусть L — компактная группа Ли Из теории Петера—Вейля вытекает, что существует линейная группа, (биголоморфно) изоморфная L. Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная полупростая алгебра Ли. Согласно (6.9.2), всякая связная группа Ли U, имеющая алгебру Ли $\mathfrak{u}$, компактна. Следовательно, мы можем предполагать, что U — линейная группа.

(6.9.5) (Г. Вейль) *Пусть U — компактная связная полупростая группа Ли. Тогда всякий ее элемент содержится в некоторой максимальной связной абелевой подгруппе. В частности, экспоненциальное отображение сюръективно.*

Доказательство. (i) *Частный случай:* $U = \operatorname{ad}(\mathfrak{u})$, где $\mathfrak{u}$ полупроста. Пусть ρ принадлежит $\operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$. Тогда найдется последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots$ регулярных элементов, такая что $\lim \rho_j = \rho$. Пусть $\mathfrak{t}$ — какая-нибудь фиксированная подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{u}$. Согласно (6.9.3), $\mathfrak{u}(\rho_j, 1)$ — подалгебра Картана и $\rho_j \in \exp(\operatorname{ad}(\mathfrak{u}(\rho_j, 1)))$. В силу (4.6.3), существуют авто-

морфизмы $\theta_j \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, для которых $\theta_j\mathfrak{t} = \mathfrak{u}(\rho_j, 1)$, $j = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, для любых $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$ и $X, Y \in \mathfrak{u}$

$$\exp(\mathrm{ad}(\sigma X))\,\sigma Y = \sigma Y + [\sigma X, \sigma Y] + \frac{1}{2}[\sigma X, [\sigma X, \sigma Y]] + \cdots$$

$$= \sigma(\exp(\mathrm{ad}\, X)\,Y)$$

и

$$\exp(\mathrm{ad}(\sigma X)) = \sigma(\exp(\mathrm{ad} X))\,\sigma^{-1}.$$

Следовательно, $\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{u}(\rho_j, 1))) = \exp(\mathrm{ad}(\theta_j\mathfrak{t})) = \theta_j(\exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{t}))\theta_j^{-1} = \theta_j \mathrm{Ad}(\mathfrak{t})\,\theta_j^{-1}$, и $\theta_j^{-1}\rho_j\theta_j \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{t})$. Поскольку группа $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ компактна, мы можем предположить, что $\lim \theta_j = \theta_0$. Тогда $\theta_0^{-1}\rho\theta_0 \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{t}) = \exp(\mathrm{ad}(\mathfrak{t}))$.

(ii) *Общий случай*. Пусть $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли группы U. Обозначим через φ присоединенное представление группы U, φ: $U \to \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$. Для любого элемента c из U найдется подалгебра Картана $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{u}$, такая что $\varphi(c) \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{t}))$. С другой стороны, группа $\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\mathfrak{t}))$ связна, в силу (6.8.6). Следовательно, c содержится в связной абелевой группе $\varphi^{-1}(\mathrm{Ad}(\mathfrak{t}))$. □

Пусть U — связная линейная группа и $\mathfrak{u}$ — ее алгебра Ли. Предположим, что $\mathfrak{u}$ компактна и полупроста. Пусть $\mathfrak{t}$ — некоторая подалгебра Картана в $\mathfrak{u}$. Тогда $T = \exp(\mathfrak{t})$ — замкнутая подгруппа в U. Так как T связна и абелева, то $T = \mathbb{T}^l$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Группа Ли $\mathbb{T}^l$ называется *тором*. Очевидно, что T — максимальный тор в U.

Пусть A — максимальная связная абелева подгруппа в U. Ее замыкание также должно быть связной абелевой группой. Следовательно, подгруппа A замкнута. Пусть $\mathfrak{a}$ — ее алгебра Ли. Очевидно, $\mathfrak{a}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{u}$ и, значит, подалгебра Картана. Следовательно, существует элемент $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, для которого $\sigma\mathfrak{a} = \mathfrak{t}$. Поскольку присоединенное представление сюръективно, найдется элемент $x \in U$, для которого $x\,\mathfrak{a}x^{-1} = \mathfrak{t}$ и, следовательно, $xAx^{-1} = T$.

(6.9.6) *Пусть U — компактная связная полупростая линейная группа и T — максимальный тор в U. Пусть, далее,* $\mathrm{N}(T)$ *— нормализатор подгруппы T в U:* $\mathrm{N}(T) = \{x \in U\colon xTx^{-1} = T\}$. *Отождествим корневую систему Δ алгебры $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ с соответствующим подмножеством алгебры Ли $\mathfrak{t}$ группы T. Тогда отображение* $\mathrm{N}(T) \ni x \mapsto \varphi(x) = \mathrm{Ad}\, x|_{\mathfrak{t}}$ *индуцирует изоморфизм факторгруппы* $\mathrm{N}(T)/T$ *на группу Вейля* $\mathrm{Ad}(\Delta)$.

Доказательство. Для $x \in \mathrm{N}(T)$ имеем $(\mathrm{Ad}x)\,\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$. Так как $\mathrm{Ad}x \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, то $\mathrm{Ad}x|_{\mathfrak{t}} \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, в силу (5.3.6).

Далее, для любого $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$ найдется ввиду (5.4.2) автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, такой что $\sigma|_{\mathfrak{t}} = S$, а поскольку отображение $\mathrm{Ad}\colon U \to \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ сюръективно, найдется такой элемент $x \in U$, что $\mathrm{Ad} x = \sigma$. Следовательно, φ сюръективно.

Заметим, что центр C группы U содержится в T. В самом деле, по теореме (6.9.4) для всякого $c \in C$ существует такое $y \in U$, что $ycy^{-1} = c \in T$.

Пусть K — ядро гомоморфизма φ. Ясно, что $K \supset T$. Пусть z принадлежит K. Тогда $(\mathrm{Ad}\, x - 1)\,\mathfrak{t} = 0$ и, в силу упражнения к § 5.4, $\mathrm{Ad}\, x = \exp \mathrm{ad}\, H$ для некоторого $H \in \mathfrak{t}$. Поэтому $\mathrm{Ad}(x \exp(-H)) = 1$ и $x \exp(-H) \in C$. Так как $C \subset T$, то $x \in T$. Следовательно, $K = T$. □

Упражнение 1. В условиях предложения (6.9.6) централизатор $C(T) = \{x \in U: xy = yx$ для всех $y \in T\}$ совпадает с T.

Упражнение 2. Обобщить теорему (6.9.5) на произвольные компактные связные линейные группы.

Упражнение 3. Полупростая связная линейная группа G компактна в том и только том случае, когда ее алгебра Ли компактна.

Глава 7

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

7.1. Введение

В предыдущих главах уже была построена значительная часть теории представлений. В этом параграфе мы рассмотрим повторно некоторые основные моменты и обобщим их в таком виде, который будет нам удобен для дальнейшего.

Пусть V — векторное пространство (всегда предполагаемое конечномерным) над полем $\widetilde{P}$ и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над подполем P поля $\widetilde{P}$. Представление алгебры $\mathfrak{g}$ на V — это отображение f: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\quad f(aX + bY) = af(X) + bf(Y)$,

(2) $\quad f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$

для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$ и $a, b \in P$. Такое отображение мы условились обозначать через (V, f).

Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{g}$ и V^* — пространство, дуальное к V. Для всякого $s \in \mathfrak{gl}(V)$ определим ${}^t s \in \mathfrak{gl}(V^*)$ условием $({}^t s\lambda)(v) = \lambda(sv)$ при $\lambda \in V^*$, $v \in V$. Имеем ${}^t s_1 {}^t s_2 = {}^t(s_2 s_1)$. Положив $f^*(X) = -{}^t f(X)$, мы получим представление (V^*, f^*), которое называется *дуальным* к (V, f) *представлением*.

Если (V_1, f_1) и (V_2, f_2) — представления алгебры $\mathfrak{g}$, то можно построить новые представления $(V_1 \oplus V_2, f_1 \oplus f_2)$ и $(V_1 \otimes V_2, f_1 \otimes f_2)$, полагая

$$(f_1 \oplus f_2)(X)(v_1 + v_2) = f_1(X) v_1 + f_2(X) v_2$$

и

$$(f_1 \oplus f_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = f_1(X) v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes f_2(X) v_2.$$

Выполнение условий (1) и (2) проверяется без труда. Эти представления называются соответственно суммой и (тензорным) произведением представлений (V_1, f_1) и (V_2, f_2).

Из всякого представления f: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ алгебры $\mathfrak{g}$ можно получить представление на тензорной алгебре $T(V)$ пространства V. Действительно,

$$T(V) = \widetilde{P} + \sum_{r=1}^{\infty} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ раз}}$$

и на каждом тензорном произведении $V \otimes \ldots \otimes V$ искомое представление полагается равным $f \otimes \ldots \otimes f$. В частности,

$$(f \otimes \cdots \oplus f)(X)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \sum_{i=1}^{r} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes f(X) v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_r.$$

Напомним теперь некоторые факты о внешней алгебре пространства V. По определению, эта алгебра есть факторалгебра тензорной алгебры $T(V)$ по идеалу I, порожденному всеми элементами вида $v \otimes v$, $v \in V$. Класс

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r + I$$

принято обозначать через $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$; r-я внешняя степень пространства V обозначается через $\bigwedge^r (V)$, а вся внешняя алгебра — через $\bigwedge (V)$. Если $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис в V, то множество всех элементов вида

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n,$$

образует базис в $\bigwedge^r (V)$.

Представление алгебры $\mathfrak{g}$ на $T(V)$ порождает представление на $\bigwedge (V)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что $\mathfrak{g}$ отображает I в I. Но

$$X(v \otimes v) = Xv \otimes v + v \otimes Xv$$
$$= (Xv + v) \otimes (Xv + v) - Xv \otimes Xv - v \otimes v.$$

Явная формула для действия $\mathfrak{g}$ на $\bigwedge (V)$ сразу следует из формулы для тензорного произведения представлений. А именно,

$$X(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge Xv_i \wedge v_{i+i} \wedge \cdots \wedge v_r.$$

Далее, пусть $X \in \mathfrak{g}$. Предположим, что существует базис $\{v_1, \ldots, v_n\}$ пространства V, такой что $Xv_i = a_i v_i$ для $i = 1, \ldots, n$ при некоторых $a_i \in \widetilde{P}$. Элементы вида $v_i \otimes v_j$ образуют базис в $V \otimes V$, и каждый такой элемент является собственным вектором. Действительно,

$$X(v_i \otimes v_j) = Xv_i \otimes v_j + v_i \otimes v_j$$
$$= (a_i v_i) \otimes v_j + v_i \otimes (a_j v_j) = (a_i + a_j)(v_i \otimes v_j).$$

Этот результат естественным образом обобщается на действие X во всем $T(V)$.

Аналогично обстоит дело с действием X на $\bigwedge(V)$. Например, элементы вида $v_i \wedge v_j$, $i < j$, образуют базис в $\bigwedge^2(V)$ и

$$X(v_i \wedge v_j) = Xv_i \wedge v_j + v_i \wedge Xv_j = (a_i + a_j)\, v_i \wedge v_j.$$

А. КОМПЛЕКСНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть $\mathfrak{l}$ — алгебра Ли над P. Ее представление (V, f) называется *комплексным представлением*, если V — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Расширяя поле коэффициентов P до $\mathbb{C}$, мы получим из $\mathfrak{l}$ алгебру Ли $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$. Всякий базис $\{X_1, \ldots, X_n\}$ в $\mathfrak{l}$ будет базисом и в $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$. Для любых $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ формула

$$\tilde{f}\colon \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \ni c_1X_1 + \cdots + c_nX_n \longmapsto c_1 f(X_1) + \cdots + c_n f(X_n) \in \mathfrak{gl}(V)$$

определяет представление алгебры $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$. Представление $\tilde{f}$ неприводимо, приводимо или вполне приводимо тогда и только тогда, когда таковым является f.

Предположим теперь, что $\mathfrak{l}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$, и пусть (V, f) — ее комплексное неприводимое представление. Согласно (1.4.11), алгебра $f(\mathfrak{l})$ либо полупроста, либо является прямой суммой некоторого полупростого идеала и центра $\mathbb{C}1$. Если $\mathfrak{g}$ — максимальная полупростая подалгебра в $\mathfrak{l}$, тогда либо $f(\mathfrak{l}) = f(\mathfrak{g})$, либо $f(\mathfrak{l}) = f(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}1$, и в обоих случаях алгебра $f(\mathfrak{g})$ неприводима. Поэтому при изучении комплексных неприводимых представлений мы можем ограничиться рассмотрением неприводимых представлений полупростых алгебр Ли (над $\mathbb{C}$). Заметим также, что всякое представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо (см. (3.4.4)).

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Зафиксируем какую-нибудь ее подалгебру Картана $\mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{h}^*$ — дуальное к $\mathfrak{h}$ пространство, Δ — множество корней и E — векторное подпространство (над $\mathbb{R}$) в $\mathfrak{h}^*$, порожденное Δ. В E имеется положительно-определенное скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, и всякий вес (произвольного представления $\mathfrak{g}$, относительно $\mathfrak{h}$) λ принадлежит E. Раз и навсегда зафиксируем некоторое лексикографическое упорядочение в E.

Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{g}$ и $\Omega(f) = \{\lambda, \mu, \ldots\}$ — совокупность всех различных весов этого представления. Тогда

$$V = V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes \cdots,$$

где $V(\lambda)$ для каждого $H \in \mathfrak{h}$ содержится в (обобщенном) собственном подпространстве преобразования $f(H)$, отвечающем собственному значению $\lambda(H)$, и называется *λ-собственным подпространством* или *весовым подпространством* данного представления. Далее, ненулевой вектор $v \in V(\lambda)$ называется *λ-собственным вектором* (или *весовым вектором*), если $f(\mathfrak{h})\, v \subset \mathbb{C}v$. Согласно

(1.4.6), для каждого веса λ существует весовой вектор. Поскольку $\Omega(f)$ — конечное множество, в нем можно найти наибольший элемент ω по отношению к зафиксированному упорядочению в E. Будем называть ω *старшим весом* и всякий весовой вектор $v \in V(\omega)$ — *старшим весовым вектором* для представления (V, f).

Для любого корня $\beta \in \Delta$ положим $\beta^* = 2\beta/\langle\beta, \beta\rangle$.

7.2. Старшие веса

(7.2.1) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, (V, f) — ее неприводимое представление и ω — старший вес этого представления. Тогда*

1) *для каждого положительного корня β имеет место равенство $E_\beta V(\omega) = 0$ и $\langle\omega, \beta^*\rangle = 2\langle\omega, \beta\rangle/\langle\beta, \beta\rangle$ есть неотрицательное целое число;*

2) $\dim V(\omega) = 1$;

3) *для каждого веса $\lambda \in \Omega(f)$ существуют неотрицательные целые числа $n_1, \ldots, n_l$, такие что*

$$\lambda = \omega - (n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l),$$

где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — совокупность всех простых корней;

4) *существует базис пространства V, состоящий из весовых векторов, т. е. $f(\mathfrak{h})$ состоит из полупростых эндоморфизмов.*

Доказательство. Что касается утверждения 1), то достаточно заметить, что $\omega + \beta \notin \Omega(f)$, поскольку вес ω — старший. Поэтому $E_\beta V(\omega) \subset V(\omega + \beta) = 0$ и, согласно (2.3.2),

$$\langle\omega, \beta^*\rangle = \frac{2\langle\omega, \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle} \geqslant 0.$$

При доказательстве остальных утверждений мы используем универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ — совокупность всех положительных корней и $\{H_1, \ldots, H_l\}$ — базис в $\mathfrak{h}$. Выберем в качестве базиса $\{X_1, \ldots, X_n\}$ в $\mathfrak{g}$ базис вида

$$E_{-\beta_k}, \ldots, E_{-\beta_1}, H_1, \ldots, H_l, E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_k}.$$

В силу (1.9.5), множество всех элементов вида

$$X_1^{e_1} \ldots X_n^{e_n},$$

где все e_i — неотрицательные целые числа, образует базис в $U(\mathfrak{g})$.

Пусть v — старший весовой вектор. Тогда $U(\mathfrak{g})v$ — ненулевое $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство в V, т. е. $U(\mathfrak{g})v = V$.

Поскольку $E_{\beta_j}v = 0$ и $H_iv \subset \mathbb{C}v$, мы видим, что V порождается векторами вида

$$w = (E_{-\beta_k})^{e_k} \ldots (E_{-\beta_1})^{e_1} v \in V(\omega - e_1\beta_1 - \cdots - e_k\beta_k).$$

Докажем индукцией по $m = e_1 + \ldots + e_k$, что каждый такой вектор w является весовым вектором. Если $m = 0$, то $w = v$ и все очевидно. В общем случае допустим, что $e_h \geqslant 1$ $(1 \leqslant h \leqslant k)$, $e_{h+1} = \ldots = e_k = 0$, и положим

$$\lambda = \omega - e_1\beta_1 - \ldots - e_{h-1}\beta_{h-1} - (e_h - 1)\beta_h.$$

По предположению индукции имеем для любого $H \in \mathfrak{h}$

$$H\left((E_{-\beta_h})^{e_h} \ldots (E_{-\beta_1})^{e_1}v\right) = \left([H, E_{-\beta_h}] + E_{-\beta_h}H\right)\left((E_{-\beta_h})^{e_h-1} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots (E_{-\beta_1})^{e_1} v\right)$$

$$= (-\beta_h(H) + \lambda(H))\left((E_{-\beta_h})^{e_h} \ldots (E_{-\beta_1})^{e_1}v\right)$$

$$= (\omega - e_1\beta_1 - \ldots - e_h\beta_h)(H)\left((E_{-\beta_h})^{e_h} \ldots (E_{-\beta_1})^{e_1}v\right).$$

Этим доказательство по индукции завершено.

Из доказанного следует справедливость утверждений 2) и 4). Поскольку каждый из корней β_j есть линейная комбинация корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ с неотрицательными целыми коэффициентами, мы заключаем, что справедливо и утверждение 3). □

Покажем теперь, что старший вес полностью характеризует представление.

(7.2.2) (Э. Картан) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, (V_1, f_1) и (V_2, f_2) — ее неприводимые представления. Если эти представления имеют одинаковые старшие веса, то они эквивалентны.*

Доказательство. Пусть v_1 и v_2 — старшие весовые векторы в V_1 и V_2 соответственно. Рассмотрим сумму этих представлений $(V_1 \oplus V_2,\ f = f_1 \oplus f_2)$ и вектор $v = v_1 + v_2 \in V_1 \oplus V_2$. Пусть $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $V = U(\mathfrak{g})\,v$ есть инвариантное подпространство в $V_1 \oplus V_2$. Выберем базис $\{X_1, \ldots, X_n\}$ в $\mathfrak{g}$, как при доказательстве теоремы (7.2.1).

Предположим, что $v_2 \in V$. Тогда найдется элемент u из $U(\mathfrak{g})$, такой что $uv = v_2$, т. е. $uv_1 = 0$ и $uv_2 = v_2$. Очевидно, что u является линейной комбинацией элементов вида

$$(E_{-\beta_k})^{a_k} \ldots (E_{-\beta_1})^{a_1} H_1^{b_1} \ldots H_l^{b_l} (E_{\beta_1})^{c_1} \ldots (E_{\beta_k})^{c_k},$$

где все a_i, b_i, c_i — неотрицательные целые числа. Но поскольку $E_{\beta_i} v_1 = E_{\beta_i} v_2 = 0$ при $i = 1, \ldots, k$, мы можем считать, что u есть линейная комбинация элементов вида

$$(1) \quad (E_{-\beta_k})^{a_k} \ldots (E_{-\beta_1})^{a_1} H_1^{b_1} \ldots H_l^{b_l}.$$

Представим u в виде суммы двух слагаемых: $u = u' + u''$, где u' — линейная комбинация тех элементов вида (1), у которых хотя бы одно $a_i > 0$, а u'' — линейная комбинация элементов вида

$$(2) \quad H_1^{b_1} \ldots H_l^{b_l}.$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$u'v_1 + u''v_1 = uv_1 = 0,$$
$$u'v_2 + u''v_2 = uv_2 = v_2.$$

Сравнивая векторы одинакового веса, получаем, что $u''v_1 = 0$ и $u''v_2 = v_2$. Следовательно, мы можем предположить, что

$$u = \sum c(b_1, \ldots, b_l) H_1^{b_1} \ldots H_l^{b_l},$$

где $c(b_1, \ldots, b_l) \in \mathbb{C}$. Тогда

$$uv_i = \sum c(b_1, \ldots, b_l)\, \omega(H_1)^{b_1} \ldots \omega(H_l)^{b_l} v_i \quad (i = 1, 2).$$

Поскольку $uv_1 = 0$ и $uv_2 = v_2$, мы имеем

$$\sum c(b_1, \ldots, b_l)\, \omega(H_1)^{b_1} \ldots \omega(H_l)^{b_l} = 0 = 1$$

— противоречие. Следовательно, $v_2 \notin V$.

Проекция $V_1 \oplus V_2 \to V_2$ индуцирует $\mathfrak{g}$-гомоморфизм p: $V \to V_1$: $f_1(X)\,p(w) = p(f(X)\,w)$ при $w \in V$. Ядром гомоморфизма p является $V \cap V_2$. Так как $V \cap V_2$ представляет собой $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство в V_2 и $v_2 \notin V \cap V_2 \neq V_2$, то $V \cap V_2 = 0$. Следовательно, p взаимно-однозначен. Но $pV = p(U(\mathfrak{g})\,v) = U(\mathfrak{g})\,v_1 = V_1$, так что p сюръективен. Таким образом, p является $\mathfrak{g}$-изоморфизмом из V на V_1. Аналогично V и V_2 — изоморфные $\mathfrak{g}$-модули. □

Упражнение. Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Применяя к $\mathfrak{u}$ предложение (6.4.5), доказать, что $f(\mathfrak{h})$ состоит из полупростых линейных преобразований.

7.3. Тензорные произведения представлений

Согласно (2.1.4), всякая полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых идеалов и такое разложение единственно с точностью до порядка слагаемых.

(7.3.1) *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— полупростая алгебра Ли над* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$ *и*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$$

— ее разложение на простые идеалы. Для $i = 1, \ldots, m$ обозначим через p_i проекцию $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}_i$. Пусть (V, f) — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда для каждого i существует неприводимое представление (V_i, f_i) алгебры $\mathfrak{g}_i$, такое что (V, f) есть тензорное произведение представлений $(V_i, f_i \circ p_i)$.

Для доказательства этой теоремы, дающей описание неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$ в терминах неприводимых представлений алгебр $\mathfrak{g}_i$, нам потребуется следующая теорема, называемая вместе с теоремой (1.2.3) *леммой Шура.*

(7.3.2) *Пусть $A \subset \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ и $B \subset \mathfrak{gl}(s, \mathbb{C})$ — неприводимые множества матриц, и пусть S — комплексная $r \times s$-матрица, для которой $AS = SB$. Тогда либо $S = 0$, либо $r = s$ и* $\det S \neq 0$.

Доказательство. Рассматривая элементы пространства $\mathbb{C}^s$ как векторы-столбцы, имеем включение $A(S\mathbb{C}^s) = SB\mathbb{C}^s \subset S\mathbb{C}^s$. Поскольку A — неприводимое множество, отсюда следует, что $S\mathbb{C}^s = \mathbb{C}^r$, если $S \neq 0$. Пусть $V = \{v \in \mathbb{C}^s : Sv = 0\}$. Тогда $SBV = 0$ и $BV \subset V \neq \mathbb{C}^s$. Так как множество B неприводимо, то $V = 0$. Следовательно, S является изоморфизмом пространства $\mathbb{C}^s$ на $\mathbb{C}^r$. ▯

Теорема (7.3.1) немедленно вытекает из следующей теоремы:

(7.3.1′) *Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — полупростые алгебры Ли над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ и (V, f) — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда существуют такие неприводимые представления (V_1, f_1) и (V_2, f_2) алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ соответственно, что*

$$f(X + Y) = f_1(X) \otimes 1^{(2)} + 1^{(1)} \otimes f_2(Y)$$

для любых $X \in \mathfrak{g}_1$ и $Y \in \mathfrak{g}_2$, где $1^{(i)}$ — единичная матрица в $\mathfrak{gl}(V^i)$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{g}_1 \ni X \longmapsto f(X)$ — вполне приводимое представление, мы можем считать, что

$$f(X) = \begin{pmatrix} F_1(X) & & & 0 \\ & F_2(X) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_k(X) \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

где F_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}_1$ размерности h_i, $i = 1, \ldots, k$. Далее, мы можем предполагать, что $F_1 = \ldots = F_p$ при $(1 \leqslant p \leqslant k)$, а представления F_q, $p < q$, не эквивалентны F_1.

Пусть S_{ij} суть $h_i \times h_j$-матрицы и

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{k1} & \dots & S_{kk} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

Предположим, что $f(X)S = Sf(X)$ для всех $X \in \mathfrak{g}_1$. Тогда $S_{ij}F_j(X) = F_1(X)S_{ij}$ при $i, j = 1, \dots, k$. По лемме Шура ((1.2.3) и (7.3.2)) имеем

$$S_{ij} = s_{ij}1_h (s_{ij} \in \mathbb{C}),\ h = h_1, \text{ если } i \leqslant p \text{ и } j \leqslant p,$$

и

$$S_{ij} = 0, \text{ если } i \leqslant p < j \text{ или } j \leqslant p < i.$$

Теперь применим этот результат к $S = f(Y)$, $Y \in \mathfrak{g}_2$. Если бы $p \neq k$, то из соотношений $S_{ij} = 0$ при $i \leqslant p < j$ следовало бы, что представление f приводимо. Значит, $p = k$. Вводя обозначения $f_1(X) = F_1(X)$ для $X \in \mathfrak{g}_1$ и $f_2(Y) = (s_{ij}) \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})$ для $Y \in \mathfrak{g}_2$, имеем

$$f(X) = f_1(X) \otimes 1_p,\ f(Y) = 1_h \otimes f_2(Y).$$

Предположим, что W — ненулевое собственное подпространство в $\mathbb{C}^p$, такое что $f_2(\mathfrak{g}_2)W \subset W$. Тогда $f(\mathfrak{g})(\mathbb{C}^h \otimes W) \subset \mathbb{C}^h \otimes W$ — противоречие. Следовательно, f_2 — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}_2$. □

(7.3.3) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, (V, f) и (V', f') — ее представления, имеющие старшие веса ω и ω' соответственно. Тогда $V \otimes V'$ содержит такое $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство W, что $(W, f \otimes f'|_W)$ есть неприводимое представление со старшим весом $\omega + \omega'$.*

Доказательство. Пусть $V = \Sigma_\lambda V(\lambda)$ и $V' = \Sigma_\mu V(\mu)$ — разложения пространств V и V' на весовые подпространства. Тогда

$$V \otimes V' = \sum_\nu \Big(\sum_{\lambda+\mu=\nu} V(\lambda) \otimes V(\mu) \Big)$$

будет разложением пространства $V \otimes V'$ на весовые подпространства (см. упр. 7 § 1.2). В частности, $\omega + \omega'$ — старший вес представления $f \otimes f'$, и так как $\dim V(\omega) = \dim V(\omega') = 1$, то $\dim (V \otimes V')(\omega + \omega') = 1$.

Пусть v и v' — старшие весовые векторы в V и V' соответственно, и пусть $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Положим $v \otimes v' = w$ и $W = U(\mathfrak{g})w$. Ясно, что W является $\mathfrak{g}$-инвариантным подпространством в $V \otimes V'$. Покажем, что W — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. Пусть

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

— разложение W на неприводимые $\mathfrak{g}$-модули, и пусть

$$w = w_1 + \ldots + w_r, \text{ где } w_i \in W_i.$$

Для $H \in \mathfrak{h}$ имеем $H_w = (\omega + \omega')(H)\, w$. Поскольку все W_i инвариантны, мы заключаем, что $Hw_i = (\omega + \omega')(H)\, w_i$, $i = 1, \ldots, r$. Так как весовое подпространство для $\omega + \omega'$ одномерно, то можно считать, что $w_1 = w$, а $w_2 = \ldots = w_r = 0$. Следовательно, $W = W_1$. □

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана. В § 5.5 мы ввели аддитивную группу

$$\Lambda = \{\lambda \in E\colon \langle \lambda, \beta^* \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \beta \in \Delta\}.$$

Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система в Δ и $\omega_1, \ldots, \omega_l$ заданы условием $\langle \omega_i, \alpha_j^* \rangle = \delta_{ij}$. Тогда $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_l$. Под *целочисленной формой* мы будем понимать произвольный элемент из Λ. Для любого представления (V, f) алгебры $\mathfrak{g}$ пусть $\Omega(f)$ обозначает множество всех весов этого представления. Тогда $\Omega(f) \subset \Lambda$ в силу (2.3.2). Обозначим через Ω объединение всех множеств $\Omega(f)$.

(7.3.4) *Определенное выше множество Ω является подгруппой группы Λ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} \ni X \mapsto f(X) \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ — представление алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $X \mapsto -{}^t(f(X))$ также будет ее представлением, которое мы обозначим через f^* (см. § 7.1). Используя (7.2.1), будем предполагать, что $f(\mathfrak{h})$ состоит из диагональных матриц. Если $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} = \Omega(f)$, то, очевидно, $\Omega(f^*) = \{-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots\}$. Далее, пусть $\lambda \in \Omega(f)$, $\lambda' \in \Omega(f')$, и пусть v и v' — весовые векторы, отвечающие λ и λ' соответственно. Тогда $f(H)\, v = \lambda(H)\, v$ и $f'(H)\, v' = \lambda'(H)\, v'$. Поэтому $(f \otimes f')(H)(v \otimes v') = (\lambda + \lambda')(H)(v \otimes v')$. Следовательно, $\lambda + \lambda' \in \Omega(f \otimes f')$. □

Целочисленная форма λ называется *доминантной*, если $\langle \lambda, \alpha_i^* \rangle \geqslant 0$, т. е. если λ имеет вид

$$\lambda = k_1\omega_1 + \ldots + k_l\omega_l, \text{ где все } k_i \geqslant 0.$$

(7.3.5) *Целочисленная форма λ доминантна тогда и только тогда, когда $S\lambda \leqslant \lambda$ для всех $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$.*

Доказательство. Пусть β — положительный корень. Тогда $\lambda \geqslant S_\beta\lambda = \lambda - \langle \lambda, \beta^* \rangle \beta$ влечет $\langle \lambda, \beta^* \rangle \geqslant 0$.

Чтобы доказать обратное, положим

$$A = \{\xi \in E\colon S\xi \leqslant \xi \text{ для всех } S \in \mathrm{Ad}(\Delta)\}.$$

Пусть W_0 — камера Вейля, определенная следующим образом:

$$W_0 = \{\eta \in E: \langle \alpha_i, \eta \rangle > 0 \text{ при } i = 1, \ldots, l\},$$

и $\overline{W}_0$ — ее замыкание. Мы видели, что $A \subset \overline{W}_0$. Так как граница B множества W_0 содержится в объединении конечного числа гиперплоскостей в E, то B не может содержать никакого (непустого) открытого подмножества множества $\overline{W}_0$. Следовательно, если $A \neq \overline{W}_0$, то можно найти $\eta_0 \in W_0$, такое что $\eta_0 \notin A$. Допустим, что $S_0\eta_0$ ($S_0 \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$) — наибольший элемент в $\mathrm{Ad}\,(\Delta)\,\eta_0$. Тогда $S_0\eta_0 \in A \subset \overline{W}_0$. Но, поскольку η_0 принадлежит камере Вейля W_0, элемент $S_0\eta_0$ должен принадлежать некоторой камере Вейля. Поэтому $S_0\eta_0 \in W_0$. Следовательно, $S_0(W_0) = W_0$ и $S_0 = 1$ (в силу упражнения к § 5.3), что противоречит условию $\eta_0 \notin A$. □

Пусть Λ^{d} обозначает множество всех доминантных целочисленных форм. Ясно, что Λ^{d} образует полугруппу по сложению: $\Lambda^{\mathrm{d}} + \Lambda^{\mathrm{d}} \subset \Lambda^{\mathrm{d}}$. Согласно (7.2.1), старший вес любого неприводимого представления доминантен. Обозначим через Ω^{h} множество всех старших весов неприводимых представлений [1]. В силу (7.2.2), множество всех классов эквивалентности неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$ находится во взаимно-однозначном соответствии с Ω^{h}. Согласно (7.3.3), Ω^{h} образует подполугруппу в Λ^{d}. Мы можем теперь задать следующие вопросы:

Вопрос 1. $\Lambda = \Omega$?

Вопрос 2. $\Lambda^{\mathrm{d}} = \Omega^{\mathrm{h}}$?

Поскольку Λ^{d} порождает группу Λ, а Ω является группой, из равенства $\Lambda^{\mathrm{d}} = \Omega^{\mathrm{h}}$ должно следовать, что $\Lambda = \Omega$.

Э. Картан дал утвердительный ответ на вопрос 2, а значит и на вопрос 1, изучив по отдельности все типы комплексных простых алгебр Ли (1913). Позднее Г. Вейль нашел доказательство, не опирающееся на классификационную теорию, а основанное на проведенном им исследовании компактных групп Ли (1927). Сравнительно недавно К. Шевалле и Хариш-Чандра дали чисто алгебраическое доказательство (1948—51). В настоящей книге мы докажем эти результаты, используя аналитический метод, более или менее близкий к методу Г. Вейля. В § 7.4 будет показано, что $\Lambda = \Omega$; опираясь на этот факт, в § 7.5 мы получим окончательный результат $\Lambda^{\mathrm{d}} = \Omega^{\mathrm{h}}$ вместе с некоторыми формулами, также принадлежащими Г. Вейлю.

(7.3.6) *При доказательстве формулы $\Lambda^{\mathrm{d}} = \Omega^{\mathrm{h}}$ достаточно рассмотреть случай, когда алгебра $\mathfrak{g}$ проста.*

---

[1] Индекс d — от dominant (доминантный), индекс h от highest (старший). — *Прим. ред.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, и пусть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$$

— ее разложение на простые идеалы. Пусть, далее, p_i: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ — естественная проекция и $\mathfrak{h}_i$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}_i$. Тогда

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}_m$$

будет подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть Δ_i — корневая система алгебры $\mathfrak{g}_i$ относительно $\mathfrak{h}_i$. Если отождествить $\beta \in \Delta_i$ с $\beta \circ p_i$: $\mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, то ясно, что

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_m \text{ (дизъюнктное объединение)}$$

есть корневая система алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Пусть π_i — фундаментальная система в Δ_i. Тогда

$$\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_m$$

— фундаментальная система в Δ. Обозначим через Λ_i группу всех целочисленных форм алгебры $\mathfrak{g}_i$ относительно π_i. Тогда

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_m \text{ (прямая сумма аддитивных групп)}$$

будет аналогичной группой для $\mathfrak{g}$. Пусть Λ_i^{d} — множество всех доминантных целочисленных форм в Λ_i. Тогда

$$\Lambda^{\mathrm{d}} = \Lambda_1^{\mathrm{d}} + \Lambda_2^{\mathrm{d}} + \ldots + \Lambda_m^{\mathrm{d}}$$

— множество всех таких форм в Λ.

Пусть Ω_i^{h} обозначает множество всех старших весов для $\mathfrak{g}_i$ и Ω^{h} — аналогичное множество для $\mathfrak{g}$. Тогда $\Omega_i^{\mathrm{h}} \subset \Omega^{\mathrm{h}}$. В самом деле, если ω — старший вес неприводимого представления (V, f) алгебры $\mathfrak{g}_i$, то $(V, f \circ p_i)$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$, имеющее старший вес ω (мы отождествляем ω с $\omega \circ p_i$). Следовательно, если нам известно, что $\Omega_i^{\mathrm{h}} = \Lambda_i^{\mathrm{d}}$ для $i = 1, \ldots, m$, то мы можем заключить, что $\Omega^{\mathrm{h}} = \Lambda^{\mathrm{d}}$. □

7.4. Модуль всех весов и универсальный центр

(7.4.1) *Пусть L — связная линейная группа, а $\mathfrak{l}$ — ее алгебра Ли. Если $\mathfrak{l}$ полупроста, то центр C группы L конечен.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{l}$ полупроста, мы можем считать, что каждый элемент X из $\mathfrak{l}$ (или L) является матрицей вида

$$X = \begin{pmatrix} F_1(X) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_k(X) \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C}),$$

где $\mathfrak{l} \ni X \longmapsto F_i(X) \in \mathfrak{gl}(r, (i), \mathbb{C})$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}$, $i = 1, \ldots, k$, и $r(1) + \ldots + r(k) = r$. Далее, для любого $x \in L$ мы имеем $\det(F_i(x)) = 1$ (см. доказательство предложения (6.4.4)).

Пусть y принадлежит C. Тогда $[y, \mathfrak{l}] = 0$, в силу (6.9.4). Следовательно, $[F_i(y), F_i(\mathfrak{l})] = 0$, и (по лемме Шура (1.2.3)) $F_i(Y) = c_i 1_{r(i)}$ $(c_i \in \mathbb{C})$. Так как $\det F_i(y) = 1$, то $c_i^{r(i)} = 1$ для $i = 1, \ldots, k$. Поэтому порядок C не превосходит $r(1)\,r(2)\ldots$ $\ldots r(k)$. □

В этом параграфе мы предполагаем, что $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$. Зафиксируем подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Пусть Δ — корневая система, а $\{E_\beta: \beta \in \Delta\}$ — базис Вейля алгебры $\mathfrak{g}$. Положим

$$\mathfrak{t} = \sqrt{-1} \sum_{\beta \in \Delta} \mathbb{R} H_\beta.$$

Тогда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\beta \in \Delta} \mathbb{C} E_\beta$$

и

$$\mathfrak{u} = \left\{ H + \sum_{\beta \in \Delta} z_\beta E_\beta \colon H \in \mathfrak{t},\ \bar{z}_\beta = z_{-\beta} \text{ для } \beta \in \Delta \right\}$$

— компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$.

Отождествим $E = \sum_{\beta \in \Delta} \mathbb{R}\beta$ с $\mathfrak{t}$ при помощи отображения $E \ni \lambda \longmapsto 2\pi \sqrt{-1}\, H_\lambda \in \mathfrak{t}$. Введем в $\mathfrak{t}$ скалярное произведение по формуле

$$(H, H') = -\frac{1}{(2\pi)^2} B(H, H') \text{ для } H, H' \in \mathfrak{h},$$

где B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\langle \lambda, \mu \rangle = (\lambda, \mu)$ для $\lambda, \mu \in E$.

Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{g}$ и $\Omega(f)$ — множество всех весов этого представления. Пусть, далее, Ω — объединение всех $\Omega(f)$ и Λ — модуль (=аддитивная группа) всех целочисленных форм. Тогда Ω является подмодулем в Λ (см. (7.3.4)).

Для любого подмножества Σ алгебры $\mathfrak{t}$ положим

$$\Sigma^\perp = \{H \in \mathfrak{t}\colon (\sigma, H) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \sigma \in \Sigma\}.$$

(7.4.2) *Если Σ — замкнутая подгруппа аддитивной группы $\mathfrak{t}$, то $\Sigma^{\perp\perp} = \Sigma$. Если Σ_1 и Σ_2 — замкнутые подгруппы в $\mathfrak{t}$ и $\Sigma_1 \subsetneqq \Sigma_2$, то $\Sigma_1^\perp \supsetneqq \Sigma_2^\perp$.*

Доказательство. Пусть Σ_0 — компонента единицы в Σ. Тогда Σ_0 — векторное подпространство в $\mathfrak{t}$ и факторгруппа Σ/Σ_0 является дискретной подгруппой векторного пространства $\mathfrak{t}/\Sigma_0$. Следовательно, можно найти векторные подпространства V_1 (с базисом $X_1, \ldots, X_k$) и V_2 алгебры $\mathfrak{t}$, такие что $\mathfrak{t} = \Sigma_0 \oplus V_1 \oplus V_2$, $(V_1, V_2) = (V_1, \Sigma_0) = (V_2, \Sigma) = 0$ и $\Sigma = \mathbb{Z}X_1 + \ldots \mathbb{Z}X_k + \Sigma_0$. Определим $Y_1, \ldots, Y_k$ соотношениями $(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$, $(\Sigma_0 + V_2, Y_j) = 0$. Тогда $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ также образует базис пространства V_1.

Теперь легко видеть, что

$$\Sigma^{\perp} = \mathbb{Z}Y_1 + \ldots + \mathbb{Z}Y_k \oplus V_2$$

и

$$\Sigma^{\perp\perp} = \mathbb{Z}X_1 + \ldots + \mathbb{Z}X_k \oplus \Sigma_0.$$

Если $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, то, очевидно, $\Sigma_1^{\perp} \supset \Sigma_2^{\perp}$. Наконец, если $\Sigma_1^{\perp} = \Sigma_2^{\perp}$, то $\Sigma_1 = \Sigma_1^{\perp\perp} = \Sigma_2^{\perp\perp} = \Sigma_2$. $\square$

(7.4.3) *Существует точное представление f алгебры $\mathfrak{g}$, такое что $U = \exp f(\mathfrak{u})$ односвязно. Для такого представления f:*

1) *линейная группа G, порожденная $\exp f(\mathfrak{u})$, односвязна;*

2) *$\Omega(f)$ порождает модуль Ω;*

3) *ядро отображения $\mathfrak{t} \in X \mapsto \exp f(X) \in \exp f(\mathfrak{t}) = T$ равно $\Omega^{\perp} = \{H \in \mathfrak{t}\colon (\lambda, H) \in \mathbb{Z}$ для всех $\lambda \in \Omega\}$;*

4) *центр C группы U совпадает с центром группы G;*

5) *$C = \exp f(\Delta^{\perp}) \subset T$, где*

$$\Delta^{\perp} = \{H \in \mathfrak{t}\colon (\beta, H) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \beta \in \Delta\};$$

6) *$C \cong \Delta^{\perp}/\Omega^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ обозначает присоединенную группу алгебры $\mathfrak{u}$. Универсальная накрывающая U группы $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ компактна, в силу (9.6.1). Но для каждой компактной группы Ли K можно найти линейную группу, биголоморфно ей изоморфную (см. [Шевалле]). Следовательно, мы можем считать, что U — линейная группа. Поскольку U и $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ локально-изоморфны, алгебра Ли группы U изоморфна алгебре Ли $\mathrm{ad}(\mathfrak{u})$ ($\cong \mathfrak{u}$) группы $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ (упр. 1 § 6.5). Таким образом, мы имеем точное представление $(\mathbb{C}^n, f)$ алгебры $\mathfrak{u}$, такое что $\exp f(\mathfrak{u})$ порождает односвязную компактную группу U. В силу (6.9.5), $\exp f(\mathfrak{u})$ — группа.

Поскольку $\mathfrak{g}$ является комплексификацией алгебры $(\mathfrak{u})$, f можно продолжить до представления алгебры $\mathfrak{g}$, которое мы также обозначим через f. Так как $\mathfrak{g}$ проста и $f(\mathfrak{g}) \supset f(\mathfrak{u}) \neq 0$, то f — точное представление $\mathfrak{g}$. Поскольку $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{u}$ — разложение Картана, линейная группа G, порожденная $\exp f(\mathfrak{g})$, гомеоморфна $U \times \mathfrak{u}$ (в силу (6.4.6)) и потому односвязна. Тем самым доказано утверждение 1).

Ввиду (7.2.1) мы можем предполагать, что $f(\mathfrak{h})$ состоит из диагональных матриц $[\lambda_1(H), \ldots, \lambda_r(H)]$, $H \in \mathfrak{h}$, где $\lambda_i \in \Omega(f)$ для всех i. В частности, для $H \in \mathfrak{t}$

$$f(H) = [2\pi\sqrt{-1}(\lambda_1, H), \ldots, 2\pi\sqrt{-1}(\lambda_r, H)],$$

$$\exp f(H) = [e(\lambda_1, H), \ldots, e(\lambda_r, H)],$$

где $e(\lambda_i, H) = \exp 2\pi\sqrt{-1}(\lambda_i, H)$. Следовательно, ядро гомоморфизма

$$\mathfrak{t} \ni H \longmapsto \exp f(H)$$

совпадает с $\Omega(f)^\perp = \{H \in \mathfrak{t}\colon (\lambda, H) \in \mathbb{Z}$ для всех $\lambda \in \Omega(f)\}$.

Пусть f' — ненулевое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда оно является точным и соответствие $f(X) \longmapsto f'(X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ задает изоморфизм $f(\mathfrak{g})$ на $f'(\mathfrak{g})$. Пусть G' — линейная группа, порожденная $\exp f'(\mathfrak{g})$. Согласно (6.5.4), отображение $\exp f(X) \longmapsto \exp f'(X)$, определенное для $X \in \mathfrak{g}$, достаточно близких к 0, есть локальный изоморфизм из G в G'. Поскольку G односвязна, этот локальный изоморфизм можно продолжить до голоморфного гоморфизма φ из G на G'. Для элементов $X \in \mathfrak{g}$, достаточно близких к 0, мы имеем равенство $\varphi(\exp f(X)) = \exp f'(X)$. Но обе его части суть голоморфные отображения, определенные всюду на $\mathfrak{g}$. Поэтому

$$\varphi(\exp f(X)) = \exp f'(X) \text{ при } X \in \mathfrak{g}.$$

Пусть H принадлежит $\Omega(f)^\perp$, т. е. $\exp f(H) = 1$. Тогда $\exp f'(H) = 1$, так что $H \in \Omega(f')^\perp$. Следовательно, $\Omega(f)^\perp \subset \Omega(f')^\perp$. Для любого подмножества Σ алгебры $\mathfrak{t}$ будем обозначать через $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ порожденную им аддитивную группу. Ясно, что $\Sigma_{\mathbb{Z}}^\perp = \Sigma^\perp$. Но $\Omega(f)_{\mathbb{Z}}$ и $\Omega(f')_{\mathbb{Z}}$, будучи подгруппами дискретной группы Λ, замкнуты в $\mathfrak{t}$. В силу (7.4.2), $\Omega(f)_{\mathbb{Z}} = \Omega(f)^{\perp\perp} \supset \supset \Omega(f')^{\perp\perp} = \Omega(f')_{\mathbb{Z}}$. Если $f' = 0$, то $\Omega(f)_{\mathbb{Z}} \supset \Omega(f') = \{0\}$. Таким образом, $\Omega(f)_{\mathbb{Z}} = \Omega$, и это доказывает утверждения 2) и 3).

Докажем 4). Пусть C — центр группы G. Тогда группа C конечна, в силу (7.4.1), и потому UC — компактная подгруппа в G. Но в разложении Картана $G = U\exp\left(\sqrt{-1}\,\mathfrak{u}\right)$ сомножитель $\exp\left(\sqrt{-1}\,\mathfrak{u}\right)$ не содержит компактных подгрупп, отличных от 1; значит, U — максимальная компактная подгруппа, и $U \supset C$. Далее, пусть x принадлежит центру группы U. Ввиду (6.9.4), $[x, f(\mathfrak{u})] = 0$ и потому $[x, f(\mathfrak{g})] = [x, f(\mathfrak{u})] + \sqrt{-1}[x, f(\mathfrak{u})] = 0$. Следовательно, $x \in C$. Этим доказано 4).

Мы видели, что $C \subset T = \exp f(\mathfrak{t})$. Но при $H \in \mathfrak{t}$

$$\mathrm{Ad}(\exp f(H)) f(E_\beta) = \exp(\mathrm{ad} f(H)) f(E_\beta) = e(\beta, H) f(E_\beta),$$

и $\exp f(H) \in C$ тогда и только тогда, когда $H \in \Omega(\mathrm{ad})^\perp = \Delta^\perp$. Это доказывает 5), а 6) немедленно следует из 5) и 3). □

Начиная с этого момента, мы предполагаем, что U — связная односвязная линейная группа, а $\mathfrak{u}$ — ее алгебра Ли. Элемент $x \in U$ называется *регулярным*, если собственное подпространство эндоморфизма $\operatorname{Ad} x$, отвечающее собственному значению 1, имеет размерность $l = \operatorname{rank} \mathfrak{u}$. В противном случае x называется *сингулярным*. Если элемент x регулярен, то элемент yxy^{-1} также регулярен для любого $y \in U$, ввиду того что $\operatorname{Ad}(yxy^{-1}) = (\operatorname{Ad} y)(\operatorname{Ad} x)(\operatorname{Ad} y)^{-1}$. Обозначим через $U^{(r)}$ множество всех регулярных элементов в U и положим $U^{(s)} = U \setminus U^{(r)}$, $T^{(r)} = T \cap U^{(r)}$ и $T^{(s)} = T \cap U^{(s)} = T \setminus T^{(r)}$, где $T = \exp(\mathfrak{t})$.

(7.4.4) *$U^{(s)}$ — замкнутое подмножество в U, и $\dim U^{(s)} \leqslant \dim U - 3$, где* dim *обозначает топологическую размерность. Следовательно, $U^{(r)}$ есть связное односвязное голоморфное многообразие.*

Доказательство. Для любого $\beta \in \Delta$ гомоморфизм

$$\mathfrak{t} \ni H \mapsto \exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\beta, H) \in \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$$

порождает гомоморфизм

$$\psi_\beta\colon T \ni \exp H \mapsto \exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\beta, H),$$

ибо $\{\beta\}^\perp \supset \Omega^\perp$. Пусть $T^{(\beta)}$ — ядро гомоморфизма ψ_β. Ясно, что $T^{(\beta)}$ — замкнутая подгруппа размерности $l-1$ в T и $T^{(s)} = \bigcup_{\beta \in \Delta} T^{(\beta)}$.

Положим

$$\mathfrak{u}^{(\beta)} = \mathfrak{t} + \mathbb{R}(E_\beta + E_{-\beta}) + \mathbb{R}\sqrt{-1}\,(E_\beta - E_{-\beta}).$$

Это — подалгебра в $\mathfrak{u}$. Пусть $\mathfrak{n}(\mathfrak{u}^{(\beta)})$ — ее нормализатор в $\mathfrak{u}$: $\mathfrak{n}(\mathfrak{u}^{(\beta)}) = \{X \in \mathfrak{u}\colon [X, \mathfrak{u}^{(\beta)}] \subset \mathfrak{u}^{(\beta)}\}$. Мы утверждаем, что $\mathfrak{n}(\mathfrak{u}^{(\beta)}) = \mathfrak{u}^{(\beta)}$. В самом деле, если $\mathfrak{n}(\mathfrak{u}^{(\beta)}) \ni Y = \sum_{\gamma \neq \pm\beta} z_\gamma E_\gamma$ $(\bar{z}_\gamma = z_{-\gamma})$, то $[H, Y] = \sum_{\gamma \neq \pm\beta} 2\pi\sqrt{-1}\,(\gamma, H)\, z_\gamma E_\gamma \in \mathfrak{u}^{(\beta)}$ для всех $H \in \mathfrak{t}$, так что $z_\gamma = 0$, т. е. $Y = 0$. Пусть $\mathrm{N}(\mathfrak{u}^{(\beta)}) = \{x \in U\colon x\mathfrak{u}^{(\beta)}x^{-1} = \mathfrak{u}^{(\beta)}\}$, и пусть $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \exp \xi X$ $(X \in \mathfrak{u})$ — однопараметрическая подгруппа в U. Если X принадлежит алгебре Ли группы $\mathrm{N}(\mathfrak{u}^{(\beta)})$, то $\exp \xi(\operatorname{ad} X)\,\mathfrak{u}^{(\beta)} = \mathfrak{u}^{(\beta)}$ и $[X, \mathfrak{u}^{(\beta)}] \subset \mathfrak{u}^{(\beta)}$, и обратно. Следовательно, алгебра Ли группы $\mathrm{N}(\mathfrak{u}^{(\beta)})$ совпадает с $\mathfrak{n}(\mathfrak{u}^{(\beta)}) = \mathfrak{u}^{(\beta)}$. Обозначим через $U^{(\beta)}$ компоненту единицы группы $\mathrm{N}(\mathfrak{u}^{(\beta)})$. Ясно, что $U^{(\beta)}$ — линейная группа и $\mathfrak{u}^{(\beta)}$ — ее алгебра Ли. Для $x \in T^{(\beta)}$ имеем $[x, \mathfrak{u}^{(\beta)}] = 0$, и потому $[x, U^{(\beta)}] = 0$.

Для любого $x \in U^{(s)}$ выберем элемент $y \in U$, такой что $y^{-1}xy \in T$. Тогда $y^{-1}xy \in T^{(s)}$ и существует $\beta \in \Delta$, для которого $x \in yT^{(\beta)}y^{-1}$. Обозначим факторпространство $U/U^{(\beta)}$ через

$F^{(\beta)}$. Отображение $T^{(\beta)}\times U \ni (x, y)\mapsto yxy^{-1}$ порождает голоморфное отображение

$$\psi^{(\beta)}\colon T^{(\beta)}\times F^{(\beta)}\ni(x,\ yF^{(\beta)})\mapsto yxy^{-1},$$

ввиду того что $[T^{(\beta)}, F^{(\beta)}]=0$. Следовательно,

$$U^{(s)}=\bigcup_{\beta\in\Delta}\psi^{(\beta)}(T^{(\beta)}\times F^{(\beta)}).$$

Но $\dim T^{(\beta)}=l-1$, a $\dim F^{(\beta)}=\dim U-l-2$. Поэтому $\dim(T^{(\beta)}\times F^{(\beta)})=\dim U-3$ и, поскольку отображение $\psi^{(\beta)}$ голоморфно, $\dim\psi^{(\beta)}(T^{(\beta)}\times F^{(\beta)})\leqslant\dim U-3$. Таким образом, $\dim U^{(s)}\leqslant\dim U-3$. Далее, так как множество $T^{(\beta)}\times F^{(\beta)}$ компактно, то компактен и его образ $\psi^{(\beta)}(T^{(\beta)}\times F^{(\beta)})$. Значит, $U^{(s)}$ — замкнутое множество.

Из теории размерности следует теперь, что множество $U^{(r)}=U\setminus U^{(s)}$ связно и односвязно. □

Далее, положим

$$\mathfrak{t}^{(r)}\ \{H\in\mathfrak{t}\colon\ \exp H\in T^{(r)}\}.$$

Ясно, что

$$\mathfrak{t}^{(r)}=\{H\in\mathfrak{t}\colon\ (\beta,H)\notin\mathbb{Z}\ \text{для всех}\ \beta\in\Delta\}.$$

Пусть $\pi=\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l\}$ — фундаментальная система в Δ и $-\alpha_0$ — старший корень. Как мы видели в § 5.6, фундаментальная клетка

$$C_0=\{H\in\mathfrak{t}\colon\ (\alpha_1,H)>0,\ldots,(\alpha_l,H)>0\ \text{и}\ (-\alpha_0,H)<1\}$$

является связной компонентой в $\mathfrak{t}^{(r)}$. Пусть $F(\mathfrak{u})$ — флаговое многообразие U/T. Голоморфное отображение

$$C_0\times U\ni(H,\ x)\mapsto x(\exp H)x^{-1}$$

индуцирует голоморфное отображение

$$\psi\colon\ C_0\times F(\mathfrak{u})\ni(H,\ xT)\mapsto x(\exp H)x^{-1}\in U^{(r)}.$$

(7.4.5) *Инфинитезимальное линейное отображение $d\psi_{(H,\ xT)}$ невырожденно в каждой точке множества $C_0\times F(\mathfrak{u})$.*

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{m}=\Big\{\sum_{\beta\in\Delta}z_\beta E_\beta\colon\ z_\beta\in\mathbb{C}\ \text{и}\ \bar z_\beta=z_{-\beta}\ \text{для}\ \beta\in\Delta\Big\}.$$

Тогда $\mathfrak{u}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{m}$ и для любого $x\in U$ отображение

$$F(\mathfrak{u})\ni x\exp\Big(\sum_{\beta\in\Delta}z_\beta E_\beta\Big)T\mapsto(z_{\beta_1},\ldots,z_{\beta_k})\in\mathbb{C}^k,$$

где $\{\beta_1,\ \ldots,\ \beta_k\}$ — множество всех положительных корней, определяет комплексную локальную систему координат на $F(\mathfrak{u})$

в окрестности точки xT. Зафиксируем $x_0 \in U$ и $H_0 \in \mathfrak{t}$. Тогда для любого $H \in \mathfrak{t}$

$$\psi(H_0 + H,\ x_0 \exp(\sum z_\beta E_\beta))$$
$$= x_0 \exp(\sum z_\beta E_\beta) \exp(H_0 + H) \exp(-\sum z_\beta E_\beta)\, x_0^{-1}$$
$$= x_0 \exp(\exp \operatorname{ad}(\sum z_\beta E_\beta)(H_0 + H))\, x_0^{-1}.$$

Докажем прежде всего, что отображение $d\exp_{H_0}$ невырожденно для любого $H_0 \in \mathfrak{t}^{(\mathfrak{r})}$. Согласно (6.5.2),

$$d\exp_{H_0} X = \left(1 + \frac{\operatorname{ad} H_0}{2!} + \frac{(\operatorname{ad} H_0)^2}{3!} + \dots\right) X \exp(H_0) \text{ для } X \in \mathfrak{u}.$$

Мы можем считать, что эндоморфизм dd H_0 задается диагональной матрицей

$$\Big[\underbrace{0, \dots, 0}_{l},\ 2\pi\sqrt{-1}(\beta_1,\ H_0),\ 2\pi\sqrt{-1}(\beta_1, H_0), \dots\Big].$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad} H_0)^{j-1}}{j!} = \Bigg[\underbrace{1, \dots, 1}_{l},\ \frac{\exp 2\pi\sqrt{-1}(\beta_1,\ H_0) - 1}{-2\pi\sqrt{-1}(\beta_1,\ H_0)},$$
$$\frac{\exp 2\pi\sqrt{-1}(-\beta_1,\ H_0) - 1}{-2\pi\sqrt{-1}(\beta_1,\ H_0)}, \dots\Bigg]$$

и, поскольку $(\beta_i,\ H_0) \notin \mathbb{Z}$, ни один из диагональных элементов не равен 0. Поэтому преобразование $\sum (\operatorname{ad} H_0)^{j-1}/j!$ невырожденно, а значит, невырожденным является и $d\exp_{H_0}$.

Таким образом, экспоненциальное отображение $\mathfrak{u} \to U$ биголоморфно в некоторой окрестности элемента H_0. С другой стороны, для всякого вещественного ξ

$$(\exp \operatorname{ad}(\xi \sum z_\beta E_\beta))(H_0 + \xi H)$$
$$= H_0 + \xi\left(H - 2\pi\sqrt{-1}\sum z_\beta(\beta,\ H_0) E_\beta\right) + O(\xi^2),$$

и, поскольку $(\beta_i,\ H_0) \neq 0$, отображение

$$\mathfrak{t} \times \mathbb{C}^k \ni (H,\ (z_{\beta_i})) \mapsto \left(H,\ \left(-2\pi\sqrt{-1}(\beta_i,\ H_0) z_{\beta_i}\right)\right) \in \mathfrak{t} \times \mathbb{C}^k$$

является линейным изоморфизмом. $\square$

Мы можем теперь доказать основную теорему данного параграфа.

(7.4.6) *Отображение* ψ: $C_0 \times F(\mathfrak{u}) \ni (H,\ xT) \mapsto x(\exp H)\, x^{-1}$ *является биголоморфным отображением из* $C_0 \times F(\mathfrak{u})$ *на* $U^{(\mathfrak{r})}$.

Доказательство. Докажем прежде всего, что ψ сюръективно. Для любого y из $U^{(\mathrm{r})}$ найдутся такие элементы $H \in \mathfrak{t}^{(\mathrm{r})}$ и $x \in U$, что $y = x (\exp H)\, x_0^{-1}$. Но, как мы видели в § 5.6, существуют $S \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$ и $H_0 \in \Lambda^{\perp}$, для которых $H' = SH + H_0 \in C_0$. Так как $\Lambda^{\perp} \subset \Omega^{\perp}$, то $\exp H_0 = 1$ и $\exp H' = \exp SH$. Согласно (6.9.6), можно найти элемент $s \in \mathrm{N}\,(T)$, для которого $\exp SH = s^{-1} (\exp H)\, s$. Следовательно, $y = xs (\exp H')\, (xs)^{-1}$.

Далее, рассмотрим множество всех преобразований алгебры $\mathfrak{t}$ вида $\mathfrak{t} \ni H \mapsto SH + X$, где $S \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$ и $X \in \Omega^{\perp}$. Так как для $S \in \mathrm{Ad}\,(\Delta)$ мы имеем $S\Omega = \Omega$, в силу (2.3.2), 3), и S — ортогональное преобразование, то $S\Omega^{\perp} = \Omega^{\perp}$. Следовательно, множество $T\left(\Omega^{\perp}\right) \mathrm{Ad}\,(\Delta)$ образует группу, где $T\,(X)$ (для $X \in \mathfrak{t}$) обозначает перенос $H \mapsto H + X$. Положим

$$\Phi = \left\{\eta \in T\left(\Omega^{\perp}\right) \mathrm{Ad}\,(\Delta)\colon\ \eta C_0 = C_0\right\}.$$

Ясно, что Φ — подгруппа группы $\mathrm{F}\,(\pi)$ из § 5.7; значит, Φ — конечная абелева группа. При этом отображение

$$\Phi \ni \varphi = T\,(X)\, S \mapsto S \in \mathrm{Aut}\,(\tilde{\pi}) \cap \mathrm{Ad}\,(\Delta)$$

взаимно-однозначно.

По заданному $\varphi = T\,(X)\, S \in \Phi$ выберем такой элемент $s \in \mathrm{N}\,(T)$, что $\mathrm{Ad}\, s\,|_{\mathfrak{t}} = S$. Если $sT = s'T$, то $s^{-1}T = Ts^{-1} = Ts'^{-1} = s'^{-1}T$. Поэтому можно определить биголоморфное отображение

$$\tilde{\varphi}\colon\ C_0 \times \mathrm{F}\,(u) \ni (H,\ xT) \mapsto (\varphi H,\ xs^{-1}T) \in C_0 \times F\,(\mathfrak{u})$$

многообразия $C_0 \times F\,(\mathfrak{u})$ на себя. Это отображение $\tilde{\varphi}$ не имеет неподвижных точек, если $\varphi \neq 1$. Действительно, из равенства $xT = xs^{-1}T$ следует, что $s \in T$ и $S = 1$, но соответствие $\varphi \mapsto S$ взаимно-однозначно. Заметим также, что $\psi \circ \tilde{\varphi} = \psi$.

Выберем такие элементы $H_1, \ldots, H_l \in \mathfrak{t}_0$, что $\Omega^{\perp} = \mathbb{Z}H_1 + \ldots + \mathbb{Z}H_l$. Обозначим через $\mathfrak{t}^{(\mathrm{d})}$ множество всех элементов $\xi_1 H_1 + \ldots + \xi_l H_l$ $(\xi_i \in \mathbb{R})$ из $\mathfrak{t}$, для которых множество $\{1, \xi_1, \ldots, \xi_l\}$ линейно-независимо над $\mathbb{Q}$. Вспоминая, что $\Omega^{\perp}$ — ядро отображения $\exp\colon \mathfrak{t} \to T$, мы легко можем убедиться в том, что $\exp H$ $(H \in \mathfrak{t})$ тогда и только тогда порождает плотную подгруппу тора T, когда $H \in \mathfrak{t}^{(\mathrm{d})}$. Далее, множество $\mathfrak{t}^{(\mathrm{d})}$ плотно в $\mathfrak{t}$. В самом деле, положим для любого набора $i = (i_0, \ldots, i_l) \in \mathbb{Z}^{l+1}$, такого что $(i_1, \ldots, i_l) \neq (0, \ldots, 0)$,

$$P\,(i) = \left\{\sum \xi_i H_i \in t\colon\ i_1\xi_1 + \cdots + i_l\xi_i = i_0\right\}.$$

Тогда $\mathfrak{t} \setminus \mathfrak{t}^{(\mathrm{d})}$ есть объединение счетного множества гиперплоскостей вида $P\,(i)$. Обозначим $C_0 \cap \mathfrak{t}^{(\mathrm{d})}$ через $C_0^{(\mathrm{d})}$. Множество $C_0^{(\mathrm{d})}$ плотно в C_0.

Предположим теперь, что $\psi(H, xT) = \psi(H', yT)$ для $H \in C_0^{(d)}$. Тогда из равенства $x \exp Hx^{-1} = y \exp H'y^{-1}$ вытекает, что $(y^{-1}x)\, T\, (y^{-1}x)^{-1} = T$. Следовательно, $s = y^{-1}x \in \mathrm{N}(T)$. Поэтому $\mathrm{Ad}\, s|_{\mathfrak{t}} = S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, и мы имеем $\exp SH = \exp H'$. Таким образом, $X = H' - SH \in \Omega^{\perp}$. Положим $\varphi = T(X)\, S$. Тогда $\varphi H = H'$ и $\tilde{\varphi}(H, xT) = (H', yT)$.

Зафиксируем элемент $(H_0, x_0T) \in C_0^{(d)} \times \mathrm{F}(u)$. Поскольку $\tilde{\varphi}\ (\neq 1)$ не имеет неподвижных точек, все элементы $\tilde{\varphi}(H_0, x_0T)$, $\varphi \in \Phi$, различны. Следовательно, найдется открытая связная окрестность W точки (H_0, x_0T), для которой $\tilde{\varphi}W \cap \tilde{\varphi}'W = \varnothing$, если $\varphi \neq \varphi'$. В силу (7.4.5), мы можем считать к тому же, что $\psi|_W$ биголоморфно. Положим $\psi W = B$ и докажем, что $\psi^{-1}B = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \tilde{\varphi} W$.

Предположим, что $\psi(X, xT) \in B$. Выберем какую-нибудь замкнутую окрестность B_0 элемента $x \exp Xx^{-1}$ в B. Пусть X_1, X_2, ... — такая последовательность элементов из $C_0^{(d)}$, что

$$\lim X_j = X \quad \text{и} \quad x \exp X_j x^{-1} \in B_0.$$

Так как $\psi|_W$ биголоморфно, то найдется замкнутое подмножество $W_0 \subset W$, такое что $\psi W_0 = B_0$. Тогда для каждого j существуют $(X'_j, x_jT) \in W_0$ и $\varphi_j \in \Phi$, для которых $\tilde{\varphi}_j (X'_j, x_jT) = (X_j, xT)$. Поскольку группа Φ конечна, мы можем найти такой элемент φ_0, что $\varphi_j = \varphi_0$ для бесконечного множества номеров j. Заменяя последовательность X_j соответствующей ее подпоследовательностью, мы можем считать, что $(X_j, xT) \in \tilde{\varphi}_0 W_0$ для всех j. Так как $\lim X_j = X$ и $\tilde{\varphi}_0 W_0$ замкнуто, то $(X, xT) \in \tilde{\varphi}_0 W_0 \subset \tilde{\varphi}_0 W$.

Итак, $\psi^{-1}B = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \tilde{\varphi} W$. Поэтому каждое из множеств $\tilde{\varphi}W$ есть связная компонента множества $\psi^{-1}B$. Поскольку $\psi|_W$ биголоморфно отображает W на B, то же справедливо и для $\psi|_{\tilde{\varphi}W}$. Так как множество элементов вида $x_0 \exp H_0 x_0^{-1}$, $H_0 \in C_0^{(d)}$, плотно в $U^{(r)}$, то $U^{(r)}$ можно покрыть открытыми множествами, определяемыми аналогично множеству B. Это доказывает, что ψ — накрывающее отображение. Но $U^{(r)}$ односвязно. Следовательно, ψ взаимно-однозначно. □

Теорема (7.4.6) имеет важные следствия:

(7.4.7) $\Omega = \Lambda$,

т. е. всякая целочисленная форма является весом некоторого (неприводимого) представления.

Доказательство. Из (5.8.5) нам известно, что

$$\mathrm{Af}(\Delta) = F(\pi)\,(T(\Lambda^{\perp})\, \mathrm{Ad}(\Delta)), \quad F(\pi) \cap (T(\Lambda^{\perp})\, \mathrm{Ad}(\Delta)) = 1.$$

Если $\Lambda \neq \Omega$, то $\Lambda^{\perp} \underset{\neq}{\subset} \Omega^{\perp}$ и $T(\Lambda^{\perp})\, \mathrm{Ad}(\Delta) \underset{\neq}{\subset} T(\Omega^{\perp})\, \mathrm{Ad}(\Delta)$. Следовательно, $F(\pi) \cap T(\Omega^{\perp})\, \mathrm{Ad}(\Delta) = \Phi \neq 1$ — противоречие.

(7.4.8) *Центр односвязной линейной группы, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{u}$ (или $\mathfrak{g}$), изоморфен универсальному центру $C(\Delta)$ из* § 5.5.

Доказательство. Это следует из (7.4.3), 6), и (7.4.7). □

Замечание. Бо́льшая часть результатов этого параграфа переносится на полупростые алгебры $\mathfrak{g}$.

Упражнение 1. Доказать (7.4.3) для полупростой алгебры $\mathfrak{g}$.

Упражнение 2. Доказать (7.4.8) для полупростой алгебры $\mathfrak{g}$.

7.5. Существование неприводимых представлений. Формула характеров и формула размерностей

Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная простая алгебра Ли, $\mathfrak{t}$ — ее подалгебра Картана. Пусть U — связная односвязная линейная группа, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{u}$. Обозначим $\exp(\mathfrak{t})$ через T. Ясно, что группа U компактна и T — максимальный тор в U. Пусть Λ — множество всех целочисленных форм (весов) на $\mathfrak{t}$. Отождествим Λ с соответствующим подмножеством в $\mathfrak{t}$ при помощи отображения $\lambda \mapsto 2\pi\sqrt{-1}H_\lambda$. Зафиксируем раз и навсегда какую-нибудь фундаментальную систему $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ в корневой системе Δ и положим

$$H_i = \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \alpha_i^* \quad \text{для } i = 1, \ldots, l.$$

Множество $\{H_1, \ldots, H_l\}$ образует базис в $\mathfrak{t}$, и

$$\Gamma = \Lambda^\perp = \mathbb{Z}H_1 + \cdots + \mathbb{Z}H_l$$

есть ядро отображения $\exp\colon \mathfrak{t} \to T$. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_l$ — фундаментальные веса: $(\omega_i, H_j) = \delta_{ij}$. Тогда

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_l.$$

Пусть F — некоторая $\mathbb{C}$-значная функция, определенная на $\mathfrak{t}$. Для всякого $S \in \mathrm{Ad}(\Delta$ определим функцию SF формулой $(SF)(H) = F(S^{-1}H)$ при $H \in \mathfrak{t}$. Функция F называется *симметричной*, соответственно *альтернирующей* (относительно группы Вейля), если $SF = F$, соответственно $SF = (\det S)F$ для всех $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$. Заметим, что для отражений S_β мы имеем $\det S_\beta = -1$, и, значит, вообще $\det S = \pm 1$ для $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$.

Пусть f — представление алгебры $\mathfrak{u}$. Назовем функцию χ, определенную формулой

$$\chi(H) = \chi_f(H) = \operatorname{tr} \exp f(H) \quad (H \in \mathfrak{t}),$$

характером представления f. Так как $\operatorname{tr} ABA^{-1} = \operatorname{tr} B$, то для эквивалентных представлений f и f' мы имеем $\chi_f = \chi_{f'}$. В этом параграфе мы примем следующие обозначения:

$$\mathrm{e}(\xi) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\right) \text{ для } \xi \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{e}(H,\ H') = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,(H,\ H')\right) \text{ для } H,\ H' \in \mathfrak{t}.$$

(7.5.1) *Всякий характер симметричен.*

Доказательство. Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{u}$ (или $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$). Пусть $\Omega(f)$ — множество всех весов этого представления и $V(\lambda)$ — весовое подпространство, соответствующее весу $\lambda \in \Omega(f)$. Тогда

$$\chi_f(H) = \sum_{\lambda \in \Omega(f)} \dim V(\lambda)\, \mathrm{e}((\lambda,\ H)) \text{ при } H \in \mathfrak{t}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\dim V(\lambda) = \dim V(S\lambda) \text{ для } S \in \mathrm{Ad}(\Delta).$$

Если $f = 0$, то это очевидно. Если $f \neq 0$, то f является изоморфизмом и индуцирует гомоморфизм групп $\varphi\colon U \to U' = \exp(f(\mathfrak{u}))$, такой что

$$\varphi(\exp X) = \exp f(X) \text{ при } X \in \mathfrak{u}$$

(см. доказательство предложения (7.4.2)). Для каждого S из $\mathrm{Ad}(\Delta)$ выберем такой элемент s из $\mathrm{N}(T)$, что $\mathrm{Ad}\, s = S$ на $\mathfrak{t}$. Тогда для любого $H \in \mathfrak{t}$ и любого вещественного числа μ имеем

$$s \exp(\mu H)\, s^{-1} = \exp(\mu S H)$$

и

$$\exp(\mu\varphi(s) f(H) \varphi(s)^{-1}) = \varphi(s)(\exp \mu f(H))\, \varphi s^{-1}$$

$$= \exp \mu f(SH).$$

Дифференцируя обе части по μ при $\mu = 0$, находим, что $\varphi(s) f(H) \varphi(s)^{-1} = f(SH)$ для всех $H \in \mathfrak{t}$. Пусть v принадлежит $V(\lambda)$: $f(H)v = 2\pi\sqrt{-1}(\lambda, H)v$ для $H \in \mathfrak{t}$. Тогда $f(SH)\varphi(s)v = \varphi(s) f(H) v = 2\pi\sqrt{-1}(\lambda, H)\varphi(s)v$. Заменяя здесь H на $S^{-1}H$, получаем

$$f(H)\varphi(s)v = 2\pi\sqrt{-1}(\lambda,\ S^{-1}H)\varphi(s)v$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}(S\lambda,\ H)\varphi(s)v.$$

Следовательно, $\varphi(s) V(\lambda) \subset V(S\lambda)$. Но точно также $\varphi(s)^{-1} V(S\lambda) \subset V(\lambda)$, т. е. $\varphi(s) V(\lambda) = V(S\lambda)$. ▯

В § 7.3 целочисленная форма λ была названа доминантной, если $S\lambda \leqslant \lambda$ для всех $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$. Будем называть форму $\lambda \in \Lambda$ *строго доминантной*, если $S\lambda < \lambda$ для всех $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, $S \neq 1$.

Для $\lambda \in \Lambda$ определим функцию A_λ формулой

$$(1) \quad A_\lambda(H) = \sum_{S \in \mathrm{Ad}(\Delta)} (\det S)\, \mathrm{e}(S\lambda, H) \text{ при } H \in \mathfrak{t}.$$

(7.5.2) 1) *Функция* A_λ *является альтернирующей.*

2) *Если существует* $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, $S \neq 1$, *для которого* $S\lambda = \lambda$, *то* $A_\lambda = 0$.

3) *Если* λ *и* μ — *строго доминантные целочисленные формы, то*

$$(2) \quad \int_0^1 \cdots \int_0^1 A_\lambda(\varphi_1 H_1 + \ldots + \varphi_l H_l)\overline{A_\mu(\varphi_1 H_1 + \ldots + \varphi_l H_l)}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_l$$

$$= \begin{cases} w \text{ при } \lambda = \mu, \\ 0 \text{ при } \lambda \neq \mu, \end{cases}$$

где w — *порядок группы Вейля* $\mathrm{Ad}(\Delta)$.

Доказательство. 1) Это утверждение очевидным образом следует из определений.

2) Допустим, что λ принадлежит некоторой камере Вейля W. Тогда $S\lambda = \lambda$ влечет $SW = W$, откуда (согласно упражнению к § 5.1) $S = 1$, — противоречие. Поэтому для некоторого $\beta \in \Delta$ мы имеем $(\beta, \lambda) = 0$. Тогда

$$S_\beta \lambda = \lambda - 2\frac{(\lambda, \beta)}{(\beta, \beta)}\beta = \lambda.$$

Но, по определению функции A_λ, $A_{S\lambda} = (\det S) A_\lambda$ для $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$. Так как $\det S_\beta = -1$, то $A_\lambda = -A_\lambda$ и $A_\lambda = 0$.

3) Если форма λ строго доминантна, то все формы $S\lambda$, $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, попарно различны. Действительно, из $S\lambda = T\lambda$ при $S, T \in \mathrm{Ad}(\Delta)$ следует, что $T^{-1}S\lambda = \lambda$ и $T^{-1}S = 1$.

Пусть λ и μ — две различные строго доминантные целочисленные формы. Если $S\lambda = T\mu$ для некоторых $S, T \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, то из $\lambda \neq \mu$ следует, что $S \neq T$, а из $T^{-1}S\lambda = \mu$, $S^{-1}T\mu = \lambda$ следует, что одновременно $\lambda < \mu$ и $\mu < \lambda$, — противоречие. Итак, $S\lambda \neq T\mu$ для всех $S, T \in \mathrm{Ad}(\Delta)$.

Теперь (2) немедленно вытекает из следующей элементарно проверяемой формулы.

$$\int_0^1 \mathrm{e}(i\varphi)\overline{\mathrm{e}(j\varphi)}\, d\varphi = \delta_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

(7.5.3) $(\omega_i, \omega_j) > 0$ *для* $i, j = 1, \ldots, l$.
В разложении $\omega_i = d_{i1}\alpha_1 + \ldots + d_{il}\alpha_l$ *все коэффициенты* d_{ij} *положительны. В частности, всякая доминантная целочисленная форма* $\geqslant 0$ *относительно лексикографического упорядочения.*

Доказательство. Согласно (2.2.5), 6),

$$(\omega_i, \omega_j) = \sum_{\beta \in \Delta} (\beta, \omega_i)(\beta, \omega_j).$$

Всякий корень β можно записать в виде

$$\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l = n_1^*\alpha_1^* + \ldots + n_l^*\alpha_l^*,$$

где числа $n_j^* = 2^{-1}(\alpha_j, \alpha_j)\, n_j$ либо все $\geqslant 0$, либо все $\leqslant 0$. Поэтому $(\beta, \omega_i)(\beta, \omega_j) = n_i^* n_j^* \geqslant 0$. Но для старшего корня $m_1^*\alpha_1^* + \ldots + m_l^*\alpha_l^*$ все коэффициенты m_j^* положительны, согласно (5.6.5). Следовательно, $(\omega_i, \omega_j) > 0$.

Далее, поскольку $(\alpha_j, \omega_i) = 0$ при $i \neq j$, то $(\omega_i, \omega_j) = d_{ij}(\alpha_j, \omega_j) > 0$. Но $(\alpha_j, \omega_j) = 2^{-1}(\alpha_j, \alpha_j) > 0$, поэтому $d_{ij} > 0$.

Всякая доминантная целочисленная форма имеет вид $\lambda = k_1\omega_1 + \ldots + k_l\omega_l$, где $0 \leqslant k_j \in \mathbb{Z}$. Так как $\omega_i > 0$, то $\lambda \geqslant 0$. $\square$

Замечание. Если алгебра $\mathfrak{u}$ (или $\mathfrak{g}$) не является простой, то можно утверждать лишь, что $(\omega_i, \omega_j) \geqslant 0$.

Пусть Δ^+ обозначает множество всех положительных элементов из Δ. Положим

$$(3) \qquad \delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Delta^+} \beta.$$

(7.5.4) $\delta = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_l$,
и δ *является минимальным элементом множества всех строго доминантных целочисленных форм.*

Доказательство. Пусть $\beta = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l \in \Delta^+$. Если $\beta \neq \alpha_i$, то $S_i\beta = \beta - (\beta, H_i)\,\alpha_i > 0$ (где $S_i = S_{\alpha_i}$), вследствие того что некоторые из коэффициентов n_j, $j \neq i$, положительны. Так как $S_i(-\alpha_i) = \alpha_i$, то

$$\Delta^+ = \{S_i\beta\colon \beta > 0,\ \beta \neq \alpha_i\} \cup \{\alpha_i\}.$$

Следовательно,

$$S_i\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0,\ \beta \neq \alpha_i} S_i\beta - \frac{1}{2}\alpha_i = \left(\delta - \frac{1}{2}\alpha_i\right) - \frac{1}{2}\alpha_i = \delta - \alpha_i.$$

Поскольку $(S_i\delta, \alpha_i) = (\gamma, S_i\alpha_i) = -(\delta, \alpha_i)$, мы имеем $(\delta - \alpha_i, \alpha_i) = -(\delta, \alpha_i)$, т. е. $(\delta, H_i) = 2(\delta, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) = 1$ при $i = 1, \ldots, l$. Следовательно,

$$\delta = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_l.$$

Предположим теперь, что $S\Delta^+ = \Delta^+$ для некоторого $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$. Так как $W_0 = \{H \in \mathfrak{t}: (\beta, H) > 0$ для всех $\beta \in \Delta^+\}$ есть камера Вейля и $SW_0 = W_0$, то $S = 1$ (см. § 5.3). Поэтому, если $S \neq 1$, то $S\Delta^+$ содержит хотя бы один отрицательный корень и потому $S\delta < \delta$. Итак, δ — строго доминантная форма.

Если $\lambda = k_1\omega_1 + \ldots + k_l\omega_l$ $(0 \leqslant k_i \in \mathbb{Z})$ — доминантная целочисленная форма и $\lambda < \delta$, то неравенство $k_i \geqslant 1$ не может выполняться для всех i (ввиду того что все $\omega_i > 0$), т. е. существует номер i, для которого $k_i = (\lambda, H_i) = 0$. Следовательно, $S_i\lambda = \lambda - (\lambda, H_i)\,\alpha_i = \lambda$. □

Рассмотрим функцию

$$(4) \qquad D(H) = \prod_{\beta > 0}\left(\mathrm{e}\left(\frac{1}{2}(\beta, H)\right) - \mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}(\beta, H)\right)\right) \quad (H \in \mathfrak{t}).$$

(7.5.5) $D(H) = A_\delta(H)$, где $\delta = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\beta > 0}\beta$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что функция D — альтернирующая. Для этого достаточно доказать, что $S_iD = -D$. Но если $\beta > 0$ и $\beta \neq \alpha_i$, то $S_i\beta > 0$ и, кроме того, $S_i\alpha_i = -\alpha_i$. Следовательно,

$$(S_iD)(H)$$
$$= \prod_{\substack{(\beta>0)\\ \beta\neq\alpha_i}}\left(\mathrm{e}\left(\frac{1}{2}(S_i\beta, H)\right) - \mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}(S_i\beta, H)\right)\right) \times \left(\mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}(\alpha_i, H)\right)\right.$$
$$\left. - \mathrm{e}\left(\frac{1}{2}(\alpha_i, H)\right)\right) = -D(H).$$

Пусть F — конечный ряд Фурье на $\mathfrak{t}$:

$$F(H) = \sum_{\mu \in \Lambda_0} c(\mu)\,\mathrm{e}(\mu, H), \qquad 0 \neq c(\mu) \in \mathbb{C},$$

где Λ_0 — некоторое конечное подмножество в Λ. Заметим, что множество $\{\mathrm{e}(\mu, H): \mu \in \Lambda\}$ линейно-независимо над $\mathbb{C}$. Если функция F — альтернирующая, то

$$SF(H) = \sum_{\mu} c(\mu)\,\mathrm{e}(S\mu, H) = \sum_{\mu} c(\mu)(\det S)\,\mathrm{e}(\mu, H)$$
$$= \sum_{\mu} c(S\mu)(\det S)\,\mathrm{e}(S\mu, H),$$

откуда следует, что $c(S\mu)(\det S) = c(\mu)$ для $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$. В частности, Λ_0 инвариантно относительно $\mathrm{Ad}(\Delta)$. Выберем наибольший элемент μ_i $(i = 1, \ldots, k)$ из каждой орбиты действия $\mathrm{Ad}(\Delta)$ на Λ_0. Тогда

$$F(H) = \sum_{i=1}^{k} c(\mu_i) A_{\mu_i}(H),$$

причем формы $\mu_1, \ldots, \mu_k$ можно считать строго доминантными, ввиду (7.5.2).

Но $D(H) = \sum \pm e(\mu, H)$, где

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0} \varepsilon(\beta)\beta, \quad \varepsilon(\beta) = \pm 1,$$

и $\mu \leqslant \delta$. Согласно (7.5.4), ни одна из форм $\mu \neq \delta$ не является строго доминантной. Так как коэффициент при $e(\delta, H)$ равен 1, мы заключаем, что $D(H) = A_\delta(H)$. $\square$

Здесь мы должны сказать несколько слов о мерах Хаара компактной группы Ли K. Пусть $C(K)$ — множество всех непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на K. Оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$. Под (*левоинвариантной*) *мерой Хаара* на K понимается такое отображение I: $C(K) \to \mathbb{R}$, что

(i) I — линейный функционал и $I \neq 0$;

(ii) если $F \in C(K)$ и $F(x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$, то $IF \geqslant 0$;

(iii) для любых $y \in K$ и $F \in C(K)$ определим $yF \in C(K)$, полагая $(yF)(x) = F(y^{-1}x)$ при $x \in K$; тогда $IF = I(yF)$ для всех $y \in K$.

Известно, что мера Хаара существует и что, если I и I' — меры Хаара на K, то $I = cI'$ для некоторой положительной константы c (см. [Шевалле]). Пусть $\mathbf{1}$ обозначает постоянную функцию на K, принимающую во всех точках значение 1. В случае когда $I\mathbf{1} = 1$, мера Хаара I называется *нормированной*. Для всякой меры Хаара I и всякой $\mathbb{C}$-значной функции $F = F_1 + \sqrt{-1}F_2$ $(F_i \in C(K))$ положим $I(F_1 + \sqrt{-1}F_2) = IF_1 + \sqrt{-1}IF_2$.

Будем обозначать нормированную меру Хаара на U обычным знаком интеграла $\int\limits_U F(x)\,dx$. Полагая для любой $\mathbb{C}$-значной непрерывной функции F на T

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 F(\exp(\varphi_1 H_1 + \ldots + \varphi_l H_l))\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_l = \int_T F(y)\,dy,$$

мы задаем нормированную меру Хаара на T.

(7.5.6) *Для всякой непрерывной $\mathbb{C}$-значной функции F на U*

$$\int_U F(x)\,dx = \frac{1}{w}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(D(H)\overline{D(H)} \int_U F(x \exp Hx^{-1})\,dx \right) \times d\varphi_1 \ldots d\varphi_l,$$

$$H = \varphi_1 H_1 + \ldots + \varphi_l H_l,$$

где w — порядок группы $\mathrm{Ad}\,(\Delta)$.

Доказательство. Легко видеть, что правая часть доказываемого равенства как функция от $F \in C(U)$ удовлетворяет условиям (i) — (iii). Для $F = 1$ эта правая часть равна

$$\frac{1}{w}\int_0^1 \cdots \int_0^1 D(H)\overline{D(H)}\,d\varphi_1 \ldots d\varphi_l = 1,$$

в силу (7.5.5) и (2). Следовательно, она определяет нормированную меру Хаара на U. ▯

Обозначим через $K(U)$ множество всех $\mathbb{C}$-значных непрерывных функций на U, для которых $F(xyx^{-1}) = F(y)$ при всех $x, y \in U$. Элементы множества $K(U)$ называются *функциями классов*, поскольку значения функции из $K(U)$ зависят только от классов сопряженных элементов. Интеграл (мера Хаара) от функции классов F определяется формулой

(5) $$\int_U F(x)\,dx = \frac{1}{w}\int_0^1 \cdots \int_0^1 F(\exp H)\,D(H)\overline{D(H)}\,d\varphi_1 \ldots d\varphi_l,$$

$$H = \varphi_1 H_1 + \cdots + \varphi_l H_l,$$

ввиду (7.5.6).

Пусть $C^{\mathrm{N}}(T)$ — совокупность всех $\mathbb{C}$-значных непрерывных функций F на T, таких что $F(sys^{-1}) = F(y)$ для $y \in T$ и $s \in \mathrm{N}(T)$. Очевидно, что отображение

$$K(U) \ni F \longmapsto F|_T \in C^{\mathrm{N}}(T)$$

взаимно-однозначно и сюръективно.

Обозначим, далее, через $C^{\mathrm{W}}(\mathfrak{t})$ множество всех $\mathbb{C}$-значных непрерывных функций F на $\mathfrak{t}$, инвариантных относительно аффинной группы Вейля

$$\mathrm{Afd}\,(\Delta) = T(\Gamma)\,\mathrm{Ad}\,(\Delta),$$

т. е. таких, что $F(\theta H) = F(H)$ для всех $\theta \in \mathrm{Afd}(\Delta)$ и $H \in \mathfrak{t}$. Тогда, как было показано, отображение

$$C^{\mathrm{N}}(T) \ni F \longmapsto F \circ \exp \in C^{\mathrm{W}}(\mathfrak{t})$$

взаимно-однозначно и сюръективно.

В дальнейшем мы будем отождествлять $K(U)$ с $C^{\mathrm{W}}(\mathfrak{t})$ при помощи отображения $F \longmapsto F \circ \exp$ и называть элементы из $C^{\mathrm{W}}(\mathfrak{t})$ также функциями классов. Согласно (5), интеграл от функции классов определяется равенством

$$(6) \qquad \int_t F(H)\,dH = \frac{1}{w} \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(H)\,D(\mathrm{H})\,\overline{D(H)}\,d\varphi_1, \ldots, d\varphi_l,$$

$$H = \varphi_1 H_1 + \cdots + \varphi_l H_l.$$

Пусть (V, f) — представление алгебры $\mathfrak{u}$. Его характер χ_f является функцией классов. Если f неприводимо, то χ_f называется *примитивным характером*. Всякий характер χ_f может быть записан в виде

$$\chi_f = k_1 \chi_{f_1} + \cdots + k_h \chi_{f_n},$$

где k_j — натуральные числа, а χ_{f_j} — примитивные характеры, что соответствует разложению данного представления на неприводимые. Множество всех примитивных характеров не более чем счетно, ввиду того что число доминантных целочисленных форм не более чем счетно. В наших обозначениях одну из основных теорем теории Петера—Вейля можно сформулировать следующим образом:

(7.5.7) *Пусть* $\{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$ — *множество всех различных примитивных характеров. Тогда*

$$(7) \qquad \int_{\mathfrak{t}} \chi_i(H)\,\overline{\chi_j(H)}\,dH = \delta_{ij} \quad \textit{при } i, j = 1, 2, \ldots,$$

и если для функции классов F

$$\int_{\mathfrak{t}} F(H)\,\overline{\chi_j(H)}\,dH = 0 \quad \textit{при всех } j = 1, 2, \ldots,$$

то $F(H) = 0$.

Короче говоря, $\{\chi_j\}$ — полная ортонормированная система в предгильбертовом пространстве $C^{\mathrm{W}}(\mathfrak{t})$ относительно скалярного произведения, определяемого интегралом $\int_{\mathfrak{t}} dH$.

(7.5.8) Теорема. *Пусть* ω — *доминантная целочисленная форма. Тогда существует неприводимое представление* (V_ω, f_ω) *алгебры* $\mathfrak{u}$

(*или* $\mathfrak{g}$) *со старшим весом* ω. *Характер* χ_ω *этого представления задается формулой*

$$(8)\qquad \chi_\omega(H) = \frac{A_{\omega+\delta}(H)}{A_\delta(H)} \quad (\textit{формула характеров}),$$

где

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta>0}\beta$$

и

$$A_\lambda(H) = \sum_{S \in \mathrm{Ad}(\Delta)} (\det S)\, e(S\lambda, H).$$

Доказательство. Пусть вначале (V, f) — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{u}$ и ω — его старший вес. Пусть χ — характер представления f. Положим для любого $H \in \mathfrak{t}$

$$\xi(H) = \chi(H)\, D(H).$$

Так как функция χ симметричная (в силу (7.5.1)), а D — альтернирующая, то и ξ — альтернирующая функция. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы (7.5.5), получаем

$$\xi(H) = \sum_{i=1}^{k} c_i A_{\mu_i}(H), \quad c_i \in \mathbb{C},$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — различные строго доминантные целочисленные формы, фигурирующие в конечных рядах Фурье, которые получаются при разложении

$$\left(\sum_{\lambda \in \Omega(f)} \dim V(\lambda)\, e(\lambda, H)\right) \prod_{\beta>0}\left(e\left(\frac{1}{2}(\beta, H)\right) - e\left(-\frac{1}{2}(\beta, H)\right)\right).$$

Тогда $\omega + \delta$ будет наибольшей из целочисленных форм, входящих в эти ряды Фурье, и притом строго доминантной, поскольку δ такова. Следовательно, мы можем предполагать, что $\mu_1 = \omega + \delta$. Так как $\dim V(\omega) = 1$, то $c_1 = 1$. В силу (2),

$$\frac{1}{w}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \xi(H)\,\overline{\xi(H)}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_l = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_k|^2.$$

Нол ввиду (7) этот интегра равен $\int_{\mathfrak{t}} \chi(H)\,\overline{\chi(H)}\, dH = 1$. Следовательно, $c_2 = \ldots = c_k = 0$ и мы имеем $\xi(H) = A_{\omega+\delta}(H)$. Поскольку $D(H) = A_\delta(H)$, отсюда вытекает (8).

Будем теперь исходить из доминантной целочисленной формы ω. Тогда форма $\omega+\delta$ строго доминантна. Положим

$$\chi_\omega = \frac{A_{\omega+\delta}}{D}.$$

Так как функции $A_{\omega+\delta}$ и $D = A_\delta$ — альтернирующие, то функция χ_ω симметрична. Поскольку каждый элемент группы $\Gamma = \mathbb{Z}H_1 + \ldots + \mathbb{Z}H_l$ является периодом как для $A_{\omega+\delta}$, так и для D, функция χ_ω инвариантна относительно $T(\Gamma)$. Следовательно, χ_ω — функция классов. В силу (2), для доминантных целочисленных форм ω и ω'

$$\int\limits_{\mathfrak{t}} \chi_\omega(H)\overline{\chi_{\omega'}(H)}\,dH$$

$$= \frac{1}{w}\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 A_{\omega+\delta}(\varphi_1 H_1 + \cdots + \varphi_l H_l)\,\overline{A_{\omega'+\delta}(\varphi_1 H_1 + \cdots + \varphi_l H_l)}$$
$$\times\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_l = 0$$

если $\omega \neq \omega'$. Если χ_ω не является примитивным характером, то вследствие полноты системы примитивных характеров мы имеем $\chi_\omega = 0$, — противоречие. Этим доказано существование неприводимого представления с характером χ_ω. Так как χ_ω — конечный ряд Фурье вида

$$\chi_\omega(H) = \mathrm{e}(\omega, H) + \sum_i c_i \mathrm{e}(\mu_i, \omega),$$

где все $\mu_i < \omega$, то ω — старший вес этого представления. □

(7.5.9) (Формула размерностей) *Размерность неприводимого представления* (V_ω, f_ω), *имеющего старший вес* ω, *равна*

$$\dim V_\omega = \frac{\prod\limits_{\beta>0}(\omega+\delta, \beta)}{\prod\limits_{\beta>0}(\delta, \beta)}, \quad \text{где } \delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta>0}\beta.$$

Доказательство. Для того чтобы вычислить $\dim V_\omega = \chi_\omega(0)$, рассмотрим $\chi_\omega(\lambda H)$, $H \in \mathfrak{t}$, как функцию вещественного параметра λ. Имеем

$$\mathrm{e}\left(\frac{1}{2}(\beta, \lambda H)\right) - \mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}(\beta, \lambda H)\right) = 2\sqrt{-1}\sin\pi\lambda(\beta, H)$$
$$= 2\pi\sqrt{-1}(\beta, H)\lambda + O(\lambda^2)$$

и, значит,

$$D(\lambda H) = \left(2\pi\sqrt{-1}\right)^k \prod_{\beta>0} (\beta, H)\,\lambda^k + O\left(\lambda^{k+1}\right),$$

где k — число положительных корней. С другой стороны,

$$\begin{aligned} A_{\omega+\delta}(\lambda\delta) &= \sum_{S\in \mathrm{Ad}(\Delta)} (\det S)\, e\,(S(\omega+\delta), \lambda\delta) \\ &= \sum \det(S)\, e\,(S^{-1}\delta, \lambda(\omega+\delta)) \\ &= D(\omega(\lambda+\delta)) = \left(2\pi\sqrt{-1}\right)^k \prod_{\beta>0} (\omega+\delta, \beta)\,\lambda^k \\ &\qquad + O(\lambda)^{k+1}. \end{aligned}$$

Но поскольку форма δ строго доминантна, то $(\beta, \delta) > 0$ для любого положительного корня β и

$$D(\lambda\delta) = \left(2\pi\sqrt{-1}\right)^k \prod_{\beta>0} (\delta, \beta)\,\lambda^k + O\left(\lambda^{k+1}\right).$$

Следовательно,

$$\chi_\omega(0) = \lim_{\lambda\to 0} \chi_\omega(\lambda\delta) = \frac{\prod\limits_{\beta>0} (\omega+\delta, \beta)}{\prod\limits_{\beta>0} (\delta, \beta)}. \ \square$$

Формула характеров и формула размерностей принадлежат Г. Вейлю.

7.6. Фундаментальные представления классических простых алгебр Ли

1. Фундаментальные веса

С каждой простой комплексной алгеброй Ли типа A_l, B_l, C_l или D_l мы связали в § 2.7 одно типическое представление. В каждом случае имелась подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц. Пусть $[x_1, \ldots, x_n]$ обозначает диагональную матрицу с элементами $x_1, \ldots, x_n$ на главной диагонали. Тогда указанными подалгебрами Картана являются $\{(x_1, \ldots, x_l)\colon\ x_i \in \mathbb{C}\}$, где

$$(x_1, \ldots, x_l) = \begin{cases} [x_1, \ldots, x_l, -(x_1 + \cdots + x_l)] & \text{для } A_l, \\ [0, x_1, \ldots, x_l, -x_1, \ldots, -x_l[& \text{для } B_l, \\ [x_1, \ldots, x_l, -x_1, \ldots, -x_l] & \text{для } C_l \text{ и } D_l. \end{cases}$$

Определим ε_i, полагая $\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_l) = x_i$ для $i = 1, \ldots, l$. Для A_l мы положим также $\varepsilon_{l+1} = -(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l)$. Тогда $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ и (в случае A_l) ε_{l+1} суть веса упомянутых типических представлений.

Система простых корней π состоит из следующих элементов:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ \ldots, \ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$$

и

$$\alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1} & \text{для } A_l, \\ \varepsilon_l & \text{для } B_l, \\ 2\varepsilon_l & \text{для } C_l, \\ \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l & \text{для } D_l. \end{cases}$$

В § 5.5 была приведена таблица матриц $d(\pi)$, с помощью которых мы можем вычислять фундаментальные веса $\omega_1, \ldots, \omega_l$ как линейные комбинации корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Выразим ω_i через $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$. Например, в случае A_l

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{l+1}(l\alpha_1 + (l-1)\alpha_2 + \cdots + \alpha_l) \\ &= \frac{1}{l+1}(l(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (l-1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \cdots + (\varepsilon_l - \varepsilon_{l+1})) \\ &= \frac{1}{l+1}((l+1)\varepsilon_1 - (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{l+1})) = \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\omega_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \omega_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \ \ldots, \quad \omega_l = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l$$

для всех типов, всего лишь с тремя исключениями:

$$\omega_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l) \text{ для } B_l \text{ и } D_l,$$

$$\omega_{l-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) \text{ для } D_l.$$

Далее в этом параграфе мы изучим по отдельности представления, отвечающие исключительным и неисключительным фундаментальным весам.

II. Представления в пространстве $\bigwedge^r(\mathbb{C}^m)$

С помощью типических представлений мы вкладываем каждую классическую простую комплексную алгебру Ли в $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$, где $m = l + 1$ для A_l, $m = 2l + 1$ и для B_l и $m = 2l$ для C_l и D_l. Поэтому каждое типическое представление индуцирует представление в $\bigwedge^r(\mathbb{C}^m)$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^m$ базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$, где e_j — весовой вектор, соответствующий весу λ_j, $j = 1, \ldots, m$. Тогда $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_r)$ есть $(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_r})$-весовой вектор в $\bigwedge^r(\mathbb{C}^m)$. Поскольку $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ могут быть равны только $\pm\varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, l)$, 0 или ε_{l+1}, старший вес равен $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r$. Таким образом, для любого неисключительного фундаментального веса ω_r можно найти соответствующий неприводимый модуль $V(\omega_r)$ в $\bigwedge^r(\mathbb{C}^m)$.

Как мы знаем, $\dim \bigwedge^r (\mathbb{C}^m) = \binom{m}{r}$. С другой стороны, по формуле размерностей мы можем вычислить $\dim V(\omega_r)$ следующим образом:

$$\dim V(\omega_r) = \begin{cases} \binom{l+1}{r} & \text{для } A_l, \\ \binom{2l+1}{r} & \text{для } B_l \ (r < l), \\ \binom{2l+1}{r} \dfrac{2l-2r+2}{2l-r+2} & \text{для } C_l, \\ \binom{2l}{r} & \text{для } D_l \ (r < l-1). \end{cases}$$

Следовательно, для A_l, B_l, D_l мы имеем $V(\omega_r) = \bigwedge^r (\mathbb{C}^m)$. Но для C_l пространство $\bigwedge^r (\mathbb{C}^{2l})$ приводимо, за исключением случая $r = 1$.

III. Спинорные представления

Наметим конструкцию спинорных представлений ортогональных алгебр Ли $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$, т. е. B_l и D_l. Подробности можно найти в книге [Бёрнер].

Пусть $V = \mathbb{C}^m$ и $T(V)$ — тензорная алгебра над V. Пусть I — идеал в $T(V)$, порожденный всеми элементами вида

$$(x_i) \otimes (y_i) + (y_i) \otimes (x_i) - 2(x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m),$$

$$(x_i),\ (y_i) \in \mathbb{C}^m.$$

Алгебра Клиффорда $C(m)$ определяется как факторалгебра $T(V)/I$; это ассоциативная алгебра с единицей. Пусть ρ: $V \to C(m)$ — естественная проекция и $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — канонический базис в $\mathbb{C}^m$: $e_i = (\delta_{ij})$. Из определяющих соотношений для агебры $C(m)$ следует, что

$$\rho(e_j)^2 = 1, \ \rho(e_j)\rho(e_k) + \rho(e_k)\rho(e_j) = 0 \ \ (j \neq k)$$

и множество всех элементов вида

$$\rho(e_{i_1})\rho(e_{i_2}) \ldots \rho(e_{i_r}), \ i_1 < i_2 < \cdots < i_r,$$

образует базис в $C(m)$. В частности, отображение ρ инъективно и

$$\dim C(m) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} = 2^m.$$

Пусть End ($\mathbb{C}^k$) — ассоциативная алгебра всех комплексных матриц размера $k \times k$. Тогда

$$C(2n) \cong \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^{2^n}\right),$$

$$C(2n+1) = \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^{2^n}\right) \oplus \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^{2^n}\right) \text{ (прямая сумма идеалов).}$$

Следующий шаг состоит в нахождении подалгебры Ли в $C(m)$, изоморфной $\mathfrak{o}(m+1, \mathbb{C})$.

Обозначим через E_{ij} матрицу, у которой (i, j)-й элемент равен 1, а остальные элементы равны 0. Множество всех элементов вида

$$S_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \quad (i > j)$$

образует базис в $\mathfrak{o}(m+1)$. Поэтому

$$[S_{ij}, S_{kl}] = \delta_{jk} S_{il} + \delta_{il} S_{jk} - \delta_{jl} S_{ik} - \delta_{ik} S_{jl}.$$

Рассмотрим в алгебре Клиффорда $C(m)$ элементы $T_{i,j}$ $(i > j)$, определяемые формулами

$$T_{i,j} = \frac{1}{2} \rho(e_i) \rho(e_j) \text{ при } m+1 > i > j,$$

$$T_{m+1,j} = -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \rho(e_j).$$

Легко видеть, что отображение $S_{ij} \mapsto T_{ij}$ $(i > j)$ задает изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{o}(m+1, \mathbb{C})$ в $C(m)$.

Следовательно, алгебра Ли $B_l \cong \mathfrak{o}(2l+1, \mathbb{C})$ допускает некоторое представление f в алгебре $C(2l) \cong \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^{2^l}\right)$. Поскольку $f(B_l)$ содержит $\rho(\mathbb{C}^{2l})$, ассоциативная алгебра, порожденная $f(B_l)$, совпадает с $C(2l)$, откуда следует, что представление f неприводимо. Таким путем мы получаем представление алгебры B_l, соответствующее весу ω_l.

Аналогично

$$D_l \cong \mathfrak{o}(2l, \mathbb{C}) \subset C(2l-1) \cong \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^{2^{l-1}}\right) \oplus \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^{2^{l-1}}\right),$$

и мы можем найти два неприводимых представления алгебры D_l размерности 2^{l-1}, соответствующие весам ω_{l-1} и ω_l. Эти пред тавления алгебры $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ называются *спинорными представлениями*.

Упражнение. Группы SL $(l+1, \mathbb{C})$ и SP $(l, \mathbb{C})$ односвязны, а группа SO $(m, \mathbb{C})$ неодносвязна. Фундаментальные веса для типов A и C являются линейными комбинациями форм $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ с целыми коэффициентами, а для типов B и D это неверно. Найти связь между этими двумя фактами.

В. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

7.7. Основные понятия

В оставшихся параграфах этой главы мы изучаем вещественные неприводимые представления вещественных полупростых алгебр Ли. После того как в данном параграфе мы введем нужные обозначения и обсудим терминологию, мы обратимся к теореме Э. Картана, которая устанавливает взаимно-однозначное соответствие между вещественными неприводимыми представлениями и комплексными неприводимыми представлениями. При помощи этого соответствия класс всех комплексных неприводимых представлений разбивается на два подкласса. Важным инвариантом, позволяющим различать эти подклассы, служит индекс комплексного неприводимого представления.

Пусть V и U — векторные пространства над $\mathbb{C}$. Отображение $T\colon V \to U$ называется *полулинейным*, если

$$T(c_1v_1 + c_2v_2) = \bar{c}_1T(v_1) + \bar{c}_2T(v_2)$$

для всех $v_1, v_2 \in V$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. (Как обычно, мы обозначаем через $\bar{c}$ число, комплексно сопряженное к c. В случае когда $U = \mathbb{C}$, полулинейное отображение называется *полулинейным функционалом*).

Множество V^* всех полулинейных функционалов на V становится линейным пространством, если ввести операции

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1v + T_2v,$$

$$(cT)(v) = cTv.$$

Далее, $\dim V^* = \dim V$. В самом деле, пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V. Определим функционалы $T_1, \ldots, T_n$ из V^*, полагая

$$T_i(e_j) = \delta_{ij} \text{ для } j = 1, \ldots, n.$$

Тогда множество $\{T_1, \ldots, T_n\}$ будет базисом пространства V^*.

Пусть $\overline{V}$ — пространство, двойственное (над $\mathbb{C}$) к V^*, т. е. векторное пространство всех комплексных линейных функционалов на V^*. Мы можем определить отображение $V \to \overline{V}$, $v \mapsto \bar{v}$ формулой

$$\bar{v}(T) = Tv$$

для всех $v \in V$, $T \in V^*$. Это отображение является взаимно-однозначным полулинейным отображением пространства V на $\overline{V}$.

Исходя из данного линейного преобразования $A\colon V \to V$, можно определить линейное преобразование $\overline{A}\colon \overline{V} \to \overline{V}$ следующим образом:

$$\overline{A}\bar{v} = \overline{Av}$$

для всех $v \in V$. Отображение $A \mapsto \overline{A}$ является взаимно-однозначным полулинейным отображением пространства $\mathfrak{gl}(V)$ на $\mathfrak{gl}(\overline{V})$. Далее,

$$\overline{[A, B]} = [\overline{A}, \overline{B}]$$

для всех $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$. Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V, то $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ — базис в $\overline{V}$; матрицей преобразования $\overline{A}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ служит матрица, комплексно-сопряженная к матрице преобразования A в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Всякое векторное пространство V над $\mathbb{C}$ можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{R}$; это вещественное векторное пространство будет обозначаться $V_{\mathbb{R}}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли и (V, f) — ее комплексное представление. Полагая

$$f_{\mathbb{R}}(X)\, v = f(X)\, v$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, мы получаем ассоциированное вещественное представление $(V_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}})$ алгебры $\mathfrak{g}$. Обратно, всякое вещественное представление (E, d) алгебры $\mathfrak{g}$ порождает комплексное представление $(E^{\mathbb{C}}, d^{\mathbb{C}})$ просто при расширении поля коэффициентов.

Предположим снова, что (V, f) — комплексное представление вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Полагая

$$\bar{f}(X) = \overline{f(X)}$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$, мы получаем представление $(\overline{V}, \bar{f})$ алгебры в пространстве $\overline{V}$. (Здесь существенно, что $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли.) В этом случае отображение $v \mapsto \bar{v}$ определяет $\mathfrak{g}$-изоморфизм между $f_{\mathbb{R}}$ и $\bar{f}_{\mathbb{R}}$.

Пусть (V_1, f_1) и (V_2, f_2) — два комплексных представления вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $(\overline{V}_1, \bar{f}_1)$ изоморфно (V_2, f_2), то говорят, что представление (V_1, f_1) *сопряжено* к представлению (V_2, f_2), и пишут $\bar{f}_1 \sim f_2$. В случае когда $\bar{f}_1 \sim f_1$, представление f_1 называется *самосопряженным*.

(7.7.1) *Пусть (V_1, f_1) и (V_2, f_2) — комплексные представления вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Представление (V_1, f_1) сопряжено к (V_2, f_2) тогда и только тогда, когда существует взаимно-однозначное полулинейное отображение T из V_1 на V_2, такое что*

$$T \circ f_1(X) = f_2(X) \circ T$$

при всех $X \in \mathfrak{g}$. В частности, представление (V_1, f_1) самосопряжено тогда и только тогда, когда существует взаимно-однознач-

ное полулинейное отображение J пространства V_1 на себя, такое что

$$J \circ f_1(X) = f_1(X) \circ J$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Если $\bar{f}_1 \sim f_2$, то существует линейный изоморфизм

$$S\colon \overline{V}_1 \to V_2,$$

такой что

$$S \circ \overline{f_1(X)} = f_2(X) \circ S$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$. Определим отображение $T\colon V_1 \to V_2$ соотношением $T(v_1) = S(\bar{v}_1)$. Ясно, что T обладает требуемыми свойствами.

Обратная импликация доказывается аналогично, подробности мы опустим. □

7.8. Теорема Картана

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли и (E, d) — ее вещественное представление. Будем обозначать через $[d]$ класс всех вещественных представлений, эквивалентных (т. е. $\mathfrak{g}$-изоморфных) представлению (E, d). Далее, положим

$$\mathbb{R}_n(g) = \{[d]\colon (E, d) \text{ неприводимо и } \dim E = n\}.$$

Аналогично, если (V, f) — комплексное представление алгебры $\mathfrak{g}$, то класс всех комплексных представлений, эквивалентных (V, f), обозначается через $[f]$. Положим также

$$\mathbb{C}_n(\mathfrak{g}) = \{[f]\colon (V, f) \text{ неприводимо и } \dim V = n\}.$$

Наконец, обозначим через $[\hat{f}]$ класс всех комплексных представлений алгебры $\mathfrak{g}$, эквивалентных либо (V, f), либо $(\overline{V}, \bar{f})$, и положим

$$\widehat{\mathbb{C}}_n(\mathfrak{g}) = \{[\hat{f}]\colon (V, f) \text{ неприводимо и } \dim V = n\}.$$

Чтобы сформулировать теорему Картана, нам надо разбить эти классы на подклассы. А именно, мы полагаем

$$\mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g}) = \{[f] \in \mathbb{C}_n(\mathfrak{g})\colon f_{\mathbb{R}} \text{ приводимо}\},$$

$$\mathbb{C}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g}) = \{[f] \in \mathbb{C}_n(\mathfrak{g})\colon f_{\mathbb{R}} \text{ неприводимо}\},$$

$$\mathbb{C}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g}) = \{[\hat{f}] \in \widehat{\mathbb{C}}_n(\mathfrak{g})\colon f_{\mathbb{R}} \text{ неприводимо}\},$$

$$\mathbb{R}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g}) = \{[d] \in \mathbb{R}_n(\mathfrak{g})\colon d^{\mathbb{C}} \text{ неприводимо}\},$$

$$\mathbb{R}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g}) = \{[d] \in \mathbb{R}_n(\mathfrak{g})\colon d^{\mathbb{C}} \text{ приводимо}\}.$$

Теорема Картана утверждает существование следующих взаимно-однозначных соответствий (через ψ_i обозначены отображения, которые нужно задать):

$$\mathbb{R}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g}) \underset{\psi_3}{\overset{\psi_1}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g}),$$

$$\mathbb{R}_{2n}^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g}) \underset{\psi_2}{\overset{\psi_2}{\rightleftarrows}} \widehat{\mathbb{C}}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g}).$$

Первый этап доказательства этой теоремы состоит в том, что с каждым вещественным неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{g}$ мы связываем некоторое комплексное неприводимое представление.

А) *Пусть (E, d) — неприводимое вещественное представление алгебры $\mathfrak{g}$, для которого представление $(E^{\mathbb{C}}, d^{\mathbb{C}})$ также неприводимо. В качестве ψ_1 мы берем отображение, которое классу $[d]$ относит класс $[d^{\mathbb{C}}]$. Далее будет показано, что $[d^{\mathbb{C}}]$ принадлежит $\mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$.*

Теперь обратимся к случаю неприводимого вещественного представления (E, d) алгебры $\mathfrak{g}$, для которого представление $(E^{\mathbb{C}}, d^{\mathbb{C}})$ приводимо. Построение неприводимого комплексного представления, отвечающего представлению (E, d), мы начнем с того, что докажем следующую лемму:

(7.8.1) *Пусть E — вещественное векторное пространство и $v \mapsto \bar{v}$ — полулинейное отображение пространства $E^{\mathbb{C}}$ на себя, определяемое правилом*

$$v = x + \sqrt{-1}\,y \mapsto \bar{v} = x - \sqrt{-1}\,y$$

для всех $x, y \in E$. Пусть W — комплексное подпространство в $E^{\mathbb{C}}$ и

$$\overline{W} = \{\bar{w} \in V\colon\ w \in W\}.$$

Равенство $W = \overline{W}$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое вещественное подпространство F пространства E, что

$$W = F + \sqrt{-1}F = \{x + \sqrt{-1}y\colon\ x, y \in F\}.$$

В этом случае $F = W \cap E$.

Доказательство. Прежде всего, из определения $\bar{v}$ следует, что $v = \bar{v}$ тогда и только тогда, когда $v \in E$. Если $W = F + \sqrt{-1}F$, то $W = \overline{W}$ и $F = W \cap E$. Обратно, предположим, что $W = \overline{W}$. Для всякого $w \in W$ имеем

$$w = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) + \left(1/2\sqrt{-1}\right)\sqrt{-1}\,(w - \bar{w}),$$

где $w+\bar{w}$ и $\sqrt{-1}(w-\bar{w})$ принадлежат $W \cap E$. Полагаем $F = W \cap E$. ▯

Предположим теперь, что (E, d) — вещественное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$, такое что $(E^{\mathbb{C}}, d^{\mathbb{C}})$ приводимо. Пусть V — произвольное $\mathfrak{g}$-инвариантное комплексное подпространство в $E^{\mathbb{C}}$, отличное от $E^{\mathbb{C}}$ и от 0. Комплексное подпространство $W = V + \bar{V}$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным и удовлетворяет условию $W = \bar{W}$. Согласно (7.8.1), существует вещественное подпространство F в E, такое что

$$\bar{V}+V=F+\sqrt{-1}F \text{ и } F=(V+\bar{V}) \cap E.$$

Из второго равенства следует, что F тоже $\mathfrak{g}$-инвариантно. Так как $V \neq 0$, то $F = E$ и $V + \bar{V} = E^{\mathbb{C}}$. Аналогично доказывается, что $(V \cap \bar{V}) \cap E$ — вещественное $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство в E и $(V \cap \bar{V}) = 0$ (поскольку $V \neq E^{\mathbb{C}}$).

Таким образом, если представление $(E^{\mathbb{C}}, d^{\mathbb{C}})$ приводимо, то существует $\mathfrak{g}$-инвариантное комплексное подпространство V в $E^{\mathbb{C}}$, для которого

$$E^{\mathbb{C}}=V+\bar{V} \text{ и } V \cap \bar{V}=0.$$

Отсюда вытекает, что $\dim V = \frac{1}{2}\dim E^{\mathbb{C}}$. Далее, V является неприводимым комплексным $\mathfrak{g}$-модулем. Действительно, если U есть $\mathfrak{g}$-инвариантное комплексное подпространство в V и $U \neq 0$, то так же, как и выше, доказывается, что

$$E^{\mathbb{C}}=U+\bar{U} \text{ и } U \cap \bar{U}=0.$$

Поэтому $\dim U = \dim V$ и $U = V$.

Представления алгебры $\mathfrak{g}$ в пространствах V и $\bar{V}$ сопряжены относительно отображения $v \mapsto \bar{v}$. Далее, эта конструкция определяет V однозначно с точностью до сопряжения. В самом деле, предположим, что U — собственное ненулевое $\mathfrak{g}$-инвариантное комплексное подпространство в $E^{\mathbb{C}}$. Тогда

$$E^{\mathbb{C}}=U+\bar{U} \text{ и } U \cap \bar{U}=0.$$

Если $v \in V$, то $v = u + \bar{w}$ для некоторых элементов $u, w \in U$. Отображение $\varphi\colon V \to U$, задаваемое формулой $\varphi(v) = u$, $\mathfrak{g}$-инвариантно. Следовательно, V изоморфно U (если φ взаимно-однозначно) или $\bar{U}$.

Соберем вместе полученные результаты:

В) *Пусть (E, d) — неприводимое вещественное представление алгебры $\mathfrak{g}$, для которого представление $(E^{\mathbb{C}}, d^{\mathbb{C}})$ приводимо. Пусть*

V — произвольное $\mathfrak{g}$-инвариантное ненулевое собственное комплексное подпространство в $E^{\mathbb{C}}$. Тогда

$$E^{\mathbb{C}} = V + \bar{V} \text{ и } V \cap \bar{V} = 0.$$

Представление $\mathfrak{f}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве V неприводимо и определено однозначно с точностью до сопряжения. В качестве ψ_2 мы возьмем отображение, которое классу $[d]$ ставит в соответствие класс $[\hat{\mathfrak{f}}]$. Позднее будет показано, что $[\hat{\mathfrak{f}}] \in \hat{\mathbb{C}}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$.

Итак, мы связали с каждым неприводимым вещественным представлением алгебры $\mathfrak{g}$ неприводимое комплексное представление. Теперь поставим в соответствие каждому комплексному неприводимому представлению вещественное неприводимое представление.

Пусть $(V, \mathfrak{f})$ — комплексное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$, для которого представление $(V_{\mathbb{R}}, \mathfrak{f}_{\mathbb{R}})$ приводимо. Пусть E — произвольное вещественное $\mathfrak{g}$-инвариантное ненулевое собственное подпространство в $V_{\mathbb{R}}$. Тогда $E + \sqrt{-1}E$ и $E \cap \sqrt{-1}E$ суть комплексные $\mathfrak{g}$-инвариантные подпространства в V. Поскольку

$$E + \sqrt{-1} \neq 0 \text{ и } E \cap \sqrt{-1}E \neq V,$$

мы заключаем, что

$$V_{\mathbb{R}} = E + \sqrt{-1}E \text{ и } E \cap \sqrt{-1}E = 0.$$

В частности, $\dim E = \frac{1}{2} \dim V_{\mathbb{R}}$.

Представление d алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве E неприводимо. В самом деле, если F — вещественное $\mathfrak{g}$-инвариантное ненулевое собственное подпространство в E, то, рассуждая так же, как и выше, мы получаем

$$V_{\mathbb{R}} = F + \sqrt{-1}F \text{ и } F \cap \sqrt{-1}F = 0.$$

Следовательно, $\dim F = \dim E$ и $F = E$.

Вещественные представления алгебры $\mathfrak{g}$ в пространствах E и $\sqrt{-1}E$ изоморфны — этот изоморфизм осуществляет отображение $x \mapsto \sqrt{-1}x$. Далее, приведенная конструкция определяет вещественное представление в E однозначно. Действительно, если F — вещественное $\mathfrak{g}$-инвариантное ненулевое собственное подпространство в $V_{\mathbb{R}}$, то

$$V_{\mathbb{R}} = F + \sqrt{-1}F \text{ и } F \cap \sqrt{-1}F = 0.$$

Если $v \in E$, то $v = x + \sqrt{-1}y$ для подходящих $x, y \in F$, и либо отображение $E \ni v \mapsto x \in F$, либо отображение $E \ni v \mapsto \sqrt{-1}y \in \sqrt{-1}F$ является $\mathfrak{g}$-изоморфизмом.

C) *Пусть* (V, f) — *комплексное неприводимое представление алгебры* $\mathfrak{g}$, *для которого представление* $(V_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}})$ *приводимо. Пусть* E — *произвольное* $\mathfrak{g}$-*инвариантное ненулевое собственное вещественное подпространство в* $V_{\mathbb{R}}$. *Тогда*

$$V_{\mathbb{R}} = E + \sqrt{-1}E \text{ и } E \cap \sqrt{-1}E = 0.$$

Соответствующее вещественное представление d *алгебры* $\mathfrak{g}$ *в пространстве* E *неприводимо и определено однозначно. В качестве* ψ_3 *мы берем отображение, относящее классу* $[f]$ *класс* $[d]$. *Ниже будет показано, что* $[d] \in \mathbb{R}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$.

D) *Пусть* (V, f) — *неприводимое комплексное представление алгебры* $\mathfrak{g}$, *для которого представление* $(V_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}})$ *неприводимо. В качестве* ψ_4 *мы возьмем отображение, которое классу* $[f]$ *относит класс* $[f_{\mathbb{R}}]$. *Сейчас будет показано, что* $[f_{\mathbb{R}}] \in \mathbb{R}_{2n}^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$.

(7.8.2) (i) *Функция* ψ_1 *взаимно-однозначно отображает* $\mathbb{R}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$ *на* $\mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$, *а* ψ_3 *взаимно-однозначно отображает* $\mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$ *на* $\mathbb{R}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$. *Более того, отображения* ψ_1 *и* ψ_2 *взаимно обратны.*

(ii) *Функция* ψ_2 *взаимно-однозначно отображает* $\mathbb{R}_{2n}^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$ *на* $\widehat{\mathbb{C}}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$, *а* ψ_4 *взаимно-однозначно отображает* $\widehat{\mathbb{C}}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$ *на* $\widehat{\mathbb{R}}_{2n}^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$. *Более того, отображения* ψ_3 *и* ψ_4 *взаимно обратны.*

Доказательство. (i) Пусть $(E, d) \in \mathbb{R}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$. По определению, представление $(E^{\mathbb{C}}, d^{\mathbb{C}})$ неприводимо. Покажем, что $[d^{\mathbb{C}}] \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$. Чтобы упростить запись, положим $V = E^{\mathbb{C}}$ и $f = d^{\mathbb{C}}$. Представление $(V_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}})$ приводимо, поскольку

$$V_{\mathbb{R}} = E + \sqrt{-1}E, \quad E \cap \sqrt{-1}E = 0,$$

а E является $\mathfrak{g}$-инвариантным подпространством в $V_{\mathbb{R}}$. Отсюда следует, что $\psi_1 [d] \subset \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$ и, согласно C),

$$\psi_3\psi_1 [d] = [d].$$

Далее, пусть $(V, f) \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$. Снова в силу C) существует $\mathfrak{g}$-инвариантное ненулевое собственное подпространство E в $V_{\mathbb{R}}$, для которого

$$V_{\mathbb{R}} = E + \sqrt{-1}E \text{ и } E \cap \sqrt{-1}E = 0.$$

Обозначим через d неприводимое вещественное представление, индуцированное представлением $f_{\mathbb{R}}$ в E. Из построения сразу следует, что V изоморфно $E^{\mathbb{C}}$ и $d^{\mathbb{C}} = f$. Это показывает, что $[d] \in \mathbb{R}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$ и

$$\psi_1\psi_3 [f] = [f].$$

(ii) Пусть вначале $(E, d) \in \mathbb{R}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$. Согласно B), существует комплексное $\mathfrak{g}$-инвариантное собственное подпространство V в $E^{\mathbb{C}}$, такое что

$$E^{\mathbb{C}} = V + \overline{V},\quad V \cap \overline{V} = 0$$

и представление f алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве V неприводимо. Приведенные выше соотношения показывают, что

$$\dim E^{\mathbb{C}} = 2 \dim V.$$

Следовательно, вещественное пространство E имеет четную размерность; обозначим эту размерность через $2n$ (вместо n).

Покажем, что $(V_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}})$ является неприводимым вещественным представлением алгебры $\mathfrak{g}$. В самом деле, если бы $V_{\mathbb{R}}$ содержало какое-нибудь вещественное $\mathfrak{g}$-инвариантное ненулевое собственное подпространство F, то

$$(F + \overline{F}) \cap E$$

было бы собственным ненулевым $\mathfrak{g}$-инвариантным подпространством в E, вопреки нашим предположениям о представлении (E, d). Это показывает, что $\psi_2 [d]$ принадлежит $\widehat{\mathbb{C}}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$.

Остается доказать, что $[f_{\mathbb{R}}] = [d]$. Отображение $\varphi\colon V \to E$, задаваемое формулой $\varphi(v) = v + \overline{v}$, $\mathbb{R}$-линейно и взаимно-однозначно. Поскольку $\dim V_{\mathbb{R}} = \dim E$, φ является изоморфизмом пространства $V_{\mathbb{R}}$ на E. Кроме того,

$$\varphi \circ f_{\mathbb{R}} = d \circ \varphi,$$

так что $[f_{\mathbb{R}}] = [d]$. Мы показали, что

$$\psi_4 \psi_2 [d] = [d].$$

Пусть теперь $(V, f) \in \widehat{\mathbb{C}}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$. Для удобства обозначим $V_{\mathbb{R}}$ через E, а $f_{\mathbb{R}}$ — через d. По предположению, вещественное представление (E, d) алгебры $\mathfrak{g}$ неприводимо. Отметим, что

$$\dim E = \dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$$

и потому $[d] \in \mathbb{R}_{2n}(\mathfrak{g})$.

Линейный автоморфизм $\Phi\colon E \to E$, определенный формулой $\Phi(x) = \sqrt{-1}x$, удовлетворяет условию $\Phi^2 = -1$. Продолжим Φ до линейного автоморфизма $\Phi^{\mathbb{C}}$ пространства $E^{\mathbb{C}}$ и положим

$$U_+ = \{x \in E^{\mathbb{C}}\colon\ \Phi^{\mathbb{C}}(x) = \sqrt{-1}x\},$$

$$U_- = \{x \in E^{\mathbb{C}}\colon\ \Phi^{\mathbb{C}}(x) = \sqrt{-1}x\}.$$

Ясно, что

$$E^{\mathbb{C}} = U_+ + U_- \text{ и } U_+ \cap U_- = 0.$$

Как обычно, мы обозначаем комплексное сопряжение в $E^{\mathbb{C}}$ относительно E через $x \longmapsto \bar{x}$. Легко проверить, что

$$\Phi^{\mathbb{C}}(\bar{x}) = \overline{\Phi^{\mathbb{C}}(x)}$$

и, значит,

$$\overline{U}_{+} = U_{-}.$$

Далее, комплексные подпространства U_{+} и U_{-} в $E^{\mathbb{C}}$ оба $\mathfrak{g}$-инвариантны, поскольку Φ коммутирует с $d = f_{\mathbb{R}}$. Следовательно, $[d] \in \mathbb{R}_{2n}^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$.

Согласно B), комплексное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в U_{+} неприводимо; будем обозначать его через f_1. Мы утверждаем, что $[f] = [f_1]$. Действительно, элемент $u = x + \sqrt{-1}y \in E^{\mathbb{C}}$ лежит в U_{+} тогда и только тогда, когда $x = \Phi(y)$, поскольку

$$\Phi^{\mathbb{C}}(u) = \Phi(x) + \sqrt{-1}\Phi(y)$$

и

$$\sqrt{-1}\, u = -y + \sqrt{-1}\, x.$$

Следовательно, мы можем определить отображение $\varphi : V \to U_{+}$, полагая

$$\varphi(y) = \Phi(y) + \sqrt{-1}\, y.$$

Это отображение $\mathbb{R}$-линейно и даже $\mathbb{C}$-линейно, поскольку

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sqrt{-1}\, y\right) &= \varphi(\Phi(y)) = \Phi^2(y) + \sqrt{-1}\, \Phi(y) \\ &= -y + \sqrt{-1}\, \Phi(y) = \sqrt{-1}\, \varphi(y). \end{aligned}$$

Кроме того, φ взаимо-однозначно и $\varphi \circ f = f_1 \circ \varphi$. Следовательно, $[f] = [f_1]$ и

$$\psi_2\psi_4\, [f] = [f]. \ \square$$

Тем самым теорема Картана полностью доказана.

7.9. Индекс комплексного представления

Теорема Картана сводит изучение вещественных неприводимых представлений к изучению комплексных неприводимых представлений. Но, если задано комплексное неприводимое представление (V, f), как можно определить, принадлежит $[f]$ к $\mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$ или к $\widehat{\mathbb{C}}_n^{\mathrm{II}}(\mathfrak{g})$? В этом параграфе каждому представлению f ставится в соответствие некоторый инвариант, называемый его индексом. Затем показывается, что $[f] \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$ в точности тогда, когда $f \sim \bar{f}$ и f имеет индекс, равный 1. На основе доказательства этого

утверждения строятся различные методы выяснения того, выполняются ли указанные условия для представления f.

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли и (V, f) — ее неприводимое комплексное представление, такое что $f \sim \bar{f}$. Как мы знаем из (7.7.1), существует взаимно-однозначное полулинейное отображение J пространства V на себя, удовлетворяющее условию

$$J \circ f(X) = f(X) \circ J$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$. Ясно, что J^2 есть автоморфизм пространства V, коммутирующий с каждым преобразованием $f(X)$; значит, по лемме Шура, $J^2 = c1$, где $c \in \mathbb{C}$. Мы утверждаем, что на самом деле $c \in \mathbb{R}$. Действительно, пусть v — произвольный ненулевой элемент пространства V. Тогда

$$J^3v = J(J^2v) = J(cv) = \bar{c}Jv$$

и

$$J^3v = J^2(Jv) = cJv;$$

следовательно, $c = \bar{c}$ и $c \in \mathbb{R}$. В том случае, когда $c > 0$, говорят, что представление (V, f) имеет *индекс* 1, и пишут $\gamma(f) = 1$; в случае когда $c < 0$, говорят, что (V, f) имеет *индекс* —1, и пишут $\gamma(f) = -1$. Если ω — старший вес представления f, то мы иногда будем писать $\gamma(\omega)$ вместо $\gamma(f)$.

Индекс представления (V, f) не зависит от выбора J. Действительно, пусть J' — другое взаимно-однозначное полулинейное отображение пространства V на себя, для которого

$$J' \circ f(X) = f(X) \circ J'$$

при всех $X \in \mathfrak{g}$. Автоморфизм $J^{-1}J'$ пространства V коммутирует с каждым преобразованием $f(X)$, и потому существует число $d \in \mathbb{C}$, такое что $J' = dJ$. Следовательно, если

$$(J')^2 = c'1$$

и $v \in V$, то

$$(J')^2v = c'v$$

и

$$(J')^2v = (dJ)^2v = (dJ)(dJ)v = d\bar{d}J^2v = d\bar{d}cv.$$

Это показывает, что

$$c' = d\bar{d}c,$$

чем наше утверждение и доказано.

(7.9.1) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли и (V, f) — ее неприводимое комплексное представление. Тогда $[f] \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$ в том и только том случае, если $f \sim \bar{f}$ и $\gamma(f) = 1$.*

Доказательство. Пусть $[f] \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(\mathfrak{g})$. Тогда, согласно утверждению С) из § 7.8, существует вещественное $\mathfrak{g}$-инвариантное собственное подпространство E пространства $V_{\mathbb{R}}$, такое что

$$V_{\mathbb{R}} = E + \sqrt{-1}\,E \quad \text{и} \quad E \cap \sqrt{-1}\,E = 0.$$

Далее, вещественное представление d, индуцированное представлением $f_{\mathbb{R}}$ в E, неприводимо. Следовательно, $V \cong E^{\mathbb{C}}$. Пусть J — комплексное сопряжение пространства V относительно E. Тогда $J^2 = 1$, J полулинейно и

$$J \circ f(X) = f(X) \circ J$$

для каждого $X \in \mathfrak{g}$, в силу $\mathfrak{g}$-инвариантности E. Следовательно, $f \sim \bar{f}$ и $\gamma(f) = 1$.

Обратно, пусть $f \sim \bar{f}$ и $\gamma(f) = 1$. Существует такое взаимно-однозначное полулинейное отображение J пространства V на себя, что $J^2 = 1$ и

$$J \circ f(X) = f(X) \circ J$$

для каждого $X \in \mathfrak{g}$. Положим

$$E = \{v \in V : Jv = v\}.$$

Ясно, что E — вещественное $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство в $V_{\mathbb{R}}$ и

$$\sqrt{-1}\,E = \{v \in V : Jv = -v\}.$$

Далее,

$$V_{\mathbb{R}} = E + \sqrt{-1}\,E \quad \text{и} \quad E \cap \sqrt{-1}\,E = 0,$$

причем первое равенство следует из того, что всякий вектор $v \in V$ можно записать в виде

$$v = \frac{1}{2}(v + Jv) + \frac{1}{2}(v - Jv).$$

Следовательно, представление $(V_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}})$ приводимо и $[f] \in \mathbb{C}_n^{\mathrm{I}}(g)$. □

(7.9.2) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли. Предположим, что существуют идеалы $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ в $\mathfrak{g}$, такие что*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m.$$

Пусть $p_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ — соответствующие проекции, и пусть (V, f) — комплексное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$, являющееся тензорным произведением представлений $(V_i, f_i \circ p_i)$. Тогда $f \sim \bar{f}$ в том и только в том случае, если $f_j \sim \bar{f}_j$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Далее,

$$\gamma(f) = \gamma(f_1) \ldots \gamma(f_m).$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что (V, f) является, в силу (7.3.1), тензорным произведением комплексных неприводимых представлений алгебр $\mathfrak{g}_i$. Если $f \sim \bar{f}$, то существует взаимно-однозначное полулинейное отображение J пространства V на себя, такое что

$$J \circ f(X) = f(X) \circ J$$

для каждого $X \in \mathfrak{g}$. Мы можем написать

$$J = J_1 \otimes \cdots \otimes J_m,$$

где J_i — взаимно-однозначное полулинейное отображение пространства V_i на себя.

Пусть теперь $X \in \mathfrak{g}_h$, где $1 \leqslant h \leqslant m$. Тогда

$$Jf(X) v_1 \otimes \cdots \otimes v_m = J_1 v_1 \otimes \cdots \otimes J_h f_h(X) v_h \otimes \cdots \otimes J_m v_m$$

и

$$f(X) J = J_1 v_1 \otimes \cdots \otimes f_h(X) J_h v_h \otimes \cdots \otimes J_m v_m.$$

Отсюда следует, что

$$J_h \circ f_h(X) = f_h(X) \circ J_h$$

для любого $X \in \mathfrak{g}_h$. Кроме того,

$$J^2 = J_1^2 \otimes \cdots \otimes J_m^2$$

и

$$\gamma(f) = \gamma(f_1) \ \ldots \ \gamma(f_m).$$

Обратно, если $f_i \sim \bar{f}_i$ для каждого $i = 1, \ldots, m$ и J_i — соответствующее полулинейное отображение V_i на себя, то достаточно положить

$$J = J_1 \otimes \cdots \otimes J_m,$$

чтобы убедиться в том, что $f \sim \bar{f}$. □

Предыдущий результат сводит изучение комплексных неприводимых представлений полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ к случаю, когда $\mathfrak{g}$ — либо одномерная вещественная абелева алгебра Ли, либо вещественная простая алгебра Ли. Всякое неприводимое комплексное представление (V, f) одномерной алгебры Ли имеет размерность 1. Следовательно, тогда

$$f \sim \bar{f} \Leftrightarrow f(X) \in \mathbb{R} \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

В этом случае $\gamma(f) = 1$. (Достаточно положить $Jcv = \bar{c}v$.)

7.10 Комплексные представления вещественных полупростых алгебр Ли

На протяжении этого параграфа $\mathfrak{g}$ будет обозначать вещественную полупростую алгебру Ли, а $\mathfrak{h}$ — ее подалгебру Картана. Алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, полученная из $\mathfrak{g}$ расширением основного поля, содержит $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ в качестве подалгебры Картана. Обозначим корневую систему алгебры $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ через Δ. Через $X \longmapsto \overline{X}$ будем обозначать комплексное сопряжение в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{g}$. Напомним, что

$$\overline{[X, Y]} = [\overline{X}, \overline{Y}] \quad \text{и} \quad \overline{cX} = \bar{c}\overline{X}$$

для $X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и $c \in \mathbb{C}$.

Если $\lambda : \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ — комплексно-линейный функционал, то можно получить новый линейный функционал $\bar{\lambda}$, полагая

$$\bar{\lambda}(H) = \overline{\lambda(\overline{H})}$$

для всех $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Отображение $\lambda \longmapsto \bar{\lambda}$ полулинейно.

Пусть α — корень алгебры $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Тогда $\bar{\alpha}$ — также корень. В самом деле, если

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha,$$

то

$$[\overline{H}, \overline{E}_\alpha] = \overline{\alpha(H)}\, \overline{E}_\alpha$$

и, значит,

$$[H, \overline{E}_\alpha] = \overline{\alpha(\overline{H})}\, \overline{E}_\alpha = \bar{\alpha}(H)\, \overline{E}_\alpha.$$

(7.10.1) *Для любых корней α и β алгебры $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$*

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Доказательство. Из отмеченного выше факта вытекает, что для всякого корня γ алгебры $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$

$$j(\gamma, \alpha) = j(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \quad \text{и} \quad k(\gamma, \alpha) = k(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}),$$

в обозначениях предложений (2.3.1) и (2.3.2). Следовательно, в силу (2.3.4),

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \alpha \rangle &= 4\Big(\sum_{\gamma \in \Delta} (j(\gamma, \alpha) - k(\gamma, \alpha))^2\Big)^{-1} \\
&= 4\Big(\sum_{\gamma \in \Delta} (j(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}) - k(\bar{\gamma}, \bar{\alpha}))^2\Big)^{-1} \\
&= 4\Big(\sum_{\gamma \in \Delta} (j(\gamma, \bar{\alpha}) - k(\gamma, \bar{\alpha}))^2\Big)^{-1} = \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle.
\end{aligned}$$

Поэтому из (2.3.2) следует, что $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$. $\square$

В качестве непосредственного следствия предложения (7.10.1) мы получаем, что

$$\langle \bar{\lambda}, \bar{\mu} \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle$$

для всех $\lambda, \mu \in E = \sum_{\beta \in \Delta} \mathbb{R}\beta$, так как это вещественное векторное пространство порождается множеством Δ. Если π — фундаментальная система в Δ, то и $\bar{\pi}$ — фундаментальная система. Согласно упражнению в § 5.3, существует единственный элемент S группы Вейля алгебры $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, для которого $S\bar{\pi} = \pi$. Ясно, что отображение $\alpha \longmapsto S\bar{\alpha} = \alpha^{\#}$ является автоморфизмом системы π.

Чтобы понять, как устроено отображение $\alpha \longmapsto \alpha^{\#}$, разложим $\mathfrak{g}$ в прямую сумму простых идеалов:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k.$$

Пусть $\mathfrak{h}_i$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_i$, Δ_i — соответствующая корневая система подалгебры $(\mathfrak{h}_i)^{\mathbb{C}}$ в $(\mathfrak{g}_i)^{\mathbb{C}}$ и π_i — фундаментальная система корней в Δ_i. Возьмем подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, задаваемую формулой

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k.$$

Отождествляя Δ_i обычным способом с подмножествами в Δ, так что

$$\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k \quad \text{(дизъюнктное объединение)},$$

возьмем в качестве π систему

$$\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_k, \quad \pi_i \subset \Delta_i.$$

Тогда для $\alpha \in \pi_i$ имеем $\bar{\alpha} \in \pi_i$ и $S\bar{\alpha} \in \pi_i$.

Итак, для того чтобы изучить отображение $\alpha \longmapsto \alpha^{\#}$, мы можем вначале предположить, что сама алгебра $\mathfrak{g}$ является вещественной простой алгеброй Ли. Здесь возможны два случая.

Случай 1: алгебра $\mathfrak{g}$ проста, а алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ нет. Эту ситуацию можно выразить несколько иначе, сказав, что представление $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ неприводимо, а $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathrm{ad}^{\mathbb{C}})$ приводимо. Согласно утверждению B) из § 7.8, существует неприводимое подпространство $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, такое что

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m} + \overline{\mathfrak{m}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{m} \cap \overline{\mathfrak{m}} = 0.$$

Поскольку

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \quad \text{и} \quad [\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m},$$

мы видим, что $\mathfrak{m}$ — простой идеал в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и $[\mathfrak{m}, \overline{\mathfrak{m}}] = 0$ (см. (4.2.3)).

Если $\mathfrak{n}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{m}$, то $\overline{\mathfrak{n}}$ — подалгебра Картана в $\overline{\mathfrak{m}}$ и $\mathfrak{n} + \overline{\mathfrak{n}}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Пусть

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{n} + \overline{\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{g}.$$

Согласно (7.8.1),

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}.$$

Следовательно, $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.

Всякая фундаментальная система $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{m}$ порождает фундаментальную систему

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_r\}$$

алгебры $\mathfrak{g}$. Отображение $\alpha \longmapsto \alpha^{\#}$ — это просто продолжение по линейности отображения $\alpha_i \longmapsto \bar{\alpha}_i$.

Случай 2: алгебра $\mathfrak{g}$ проста и алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ проста. Ответ для этого случая будет дан в § 8.7.

Пусть снова $\mathfrak{g}$ — вещественная полупростая алгебра Ли. Задача, которую мы сейчас хотим решить, состоит в том, как определить, является ли данное комплексное неприводимое представление (V, f) самосопряженным. Если оно является таковым, нам бы хотелось также вычислить $\gamma(f)$.

(7.10.2) *Пусть (V, f) — неприводимое комплексное представление вещественной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если ω — старший вес этого представления (продолженного на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$), то $S\bar{\omega}$ (где S: $\alpha \longmapsto \alpha^{\#}$) — старший вес представления $(\bar{V}, \bar{f})$. В частности,*

$$f \sim \bar{f} \Longleftrightarrow \omega = S\bar{\omega}.$$

Доказательство. Если λ — какой-либо вес представления (V, f), то $\bar{\lambda}$ — вес представления $(\bar{V}, \bar{f})$, поскольку из условия

$$Hv = \lambda(H)\, v$$

следует, что

$$\bar{H}\bar{v} = \overline{\lambda(H)}\,\bar{v}$$

и

$$H\bar{v} = \overline{\lambda(\bar{H})}\,\bar{v} = \bar{\lambda}(H)\,\bar{v}.$$

Пусть теперь $\{\alpha_i\}_1^l$ — фундаментальная система в Δ. Всякий вес λ представления (V, f) записывается в виде

$$\lambda = \omega - \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i,$$

где n_i — неотрицательные целые числа (см. (7.2.1)). Отсюда вытекает, что

$$S\bar{\lambda} = S\bar{\omega} - \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i^{\#}.$$

Но когда λ пробегает множество всех весов алгебры $\mathfrak{h}$ в V, $S\bar{\lambda}$ пробегает множество всех весов алгебры $\mathfrak{h}$ в $\overline{V}$ (см. (2.3.2)). $\square$

Отображение $\omega \mapsto \omega^{\#} = S\bar{\omega}$ переводит старший вес в старший вес. В самое деле, если ω — старший вес представления (V, f), то $\omega^{\#}$ — старший вес представления $(\overline{V}, \overline{f})$, согласно (7.10.2). Далее,

$$\omega^{\#\#} = \omega,$$

поскольку каждая из частей этого равенства — старший вес представления (V, f).

Пусть $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ — множество всех фундаментальных весов по отношению к некоторой фундаментальной системе $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Так как инверсия $*$ коммутирует с любым ортогональным преобразованием, то имеет место равенство $*\# = \#*$, откуда (с учетом того, что $\langle \omega_i, \alpha_j^* \rangle = \delta_{ij}$) следует, что $\langle \omega_i^{\#}, \alpha_j^{*\#} \rangle = \langle \omega_i^{\#}, \alpha_j^{\#*} \rangle = \delta_{ij}$. Следовательно, отображение $\#$ индуцирует некоторую перестановку множества $\{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$.

Занумеруем фундаментальные веса сладующим образом:

$$\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_1^{\#}, \ldots, \omega_r^{\#}, \omega_{2r+1}, \ldots, \omega_l;$$

при этом предполагается, что

$$\omega_i = \omega_i^{\#}$$

для $i = 2r + 1, \ldots, l$. Всякий старший вес ω можно записать в виде

$$\omega = n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + n_1'\omega_1^{\#} + \cdots + n_r'\omega_r^{\#} + n_{2r+1}\omega_{2r+1} + \cdots + n_l\omega_l.$$

Отсюда вытекает что $\omega = \omega^{\#}$ тогда и только тогда, когда $n_1 = n_1', \ldots, n_r = n_r'$. В этом случае

$$\omega = n_1(\omega_1 + \omega_1^{\#}) + \cdots + n_r(\omega_r + \omega_r^{\#}) + n_{2r+1}\omega_{2r+1} + \cdots + n_l\omega_l.$$

Подведем итоги. Определить, выполняется ли соотношение $f \sim \overline{f}$, можно, проверив условие $\omega = \omega^{\#}$. Это в свою очередь можно сделать, выразив ω через фундаментальные веса. В случае когда $f \sim \overline{f}$, индекс представления f можно выразить через индексы весов $\omega_{2r+1}, \ldots, \omega_l$. Для доказательства этого нам потребуются два вспомогательных результата.

(7.10.3) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная полупростая алгебра Ли и (V, f) — ее неприводимое комплексное представление, имеющее старший вес ω. Тогда индекс неприводимого комплексного представления алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом $\omega + \omega^{\#}$ равен* 1.

Доказательство. Пусть вначале (V', f') — самосопряженное комплексное представление алгебры $\mathfrak{g}$. Если λ — вес алгебры $\mathfrak{h}$ на V', то и $\bar{\lambda}$ является весом. В самом деле, пусть J' — взаимно-однозначное полулинейное отображение пространства V' на себя, коммутирующее с действием алгебры $\mathfrak{g}$. Если $Hv' = \lambda(H) v'$, то

$$HJ'v' = J'Hv' = J'\lambda(H) v' = \overline{\lambda(H)} J'v' = \bar{\lambda}(H) J'v'.$$

Как мы видели в (7.3.3), комплексное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом $\omega + \omega^{\#}$ однозначно реализуется в пространстве $V \otimes \overline{V}$ (как сужение тензорного произведения представлений). Далее, это представление является самосопряженным, в силу (7.10.2).

Пусть J — отображение пространства $V \otimes \overline{V}$ на себя, определенное формулой

$$J(x \otimes \bar{y}) = y \otimes \bar{x}.$$

Легко проверяется, что это отображение взаимно-однозначно, полулинейно и сюръективно. Далее, оно коммутирует с действием алгебры $\mathfrak{g}$, так как

$$JX(x \otimes \bar{y}) = J(Xx \otimes \bar{y} + x \otimes \overline{Xy}) = y \otimes \overline{Xx} + Xy \otimes x$$
$$= X(y \otimes \bar{x}) = XJ(x \otimes y).$$

Следовательно, J отображает подпространство с максимальным весом $\omega + \omega^{\#}$ в себя. (Образ этого пространства при отображении J имеет веса $\bar{\lambda}$, но данное неприводимое представление является самосопряженным и однозначно определено.) Поскольку $J^2 = 1$, индекс веса $\omega + \omega^{\#}$ равен 1. □

(7.10.4) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная полупростая алгебра Ли, (V_1, f_1) и (V_2, f_2) — два ее самосопряженных комплексных неприводимых представления со старшими весами ω_1 и ω_2 соответственно. Если (V, f) — неприводимое представление, имеющее старший вес $\omega_1 + \omega_2$, то $f \sim \bar{f}$ и $\gamma(f) = \gamma(f_1)\gamma(f_2)$.*

Доказательство. Пусть v_1 — вектор старшего веса в V_1, а v_2 — вектор старшего веса в V_2. Неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль V можно реализовать как подпространство

$$U(\mathfrak{g}) \cdot v_1 \otimes v_2 \subset V_1 \otimes V_2.$$

Пусть теперь J_i для $i = 1, 2$, — взаимно-однозначное полулинейное отображение пространства V_i на себя, удовлетворяющее условию

$$J_i \circ f_i(X) = f_i(X) \circ J_i$$

для любого $X \in \mathfrak{g}$. Предположим еще, что

$$J_1^2 = c_1 1 \quad \text{и} \quad J_2^2 = c_2 1.$$

Отображение $J = J_1 \otimes J_2$ перестановочно с действием алгебры $\mathfrak{g}$, взаимно-однозначно, полулинейно и переводит $V_1 \otimes V_2$ на себя. Оно переводит также и пространство V на себя (в силу соображений, аналогичных использованным при доказательстве предложения (7.10.3)).

Отсюда следует, что $f \sim \bar{f}$ (что можно было бы также показать, рассмотрев старший вес представления f). Далее,

$$J^2 = J_1^2 \otimes J_2^2 = c_1 c_2 1$$

и $\gamma(f) = \gamma(f_1) \cdot \gamma(f_2)$. □

(7.10.5) *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая вещественная алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана. Пусть Δ — корневая система алгебры $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и*

$$\omega_1, \ldots, \omega_r, \quad \omega_1^{\#}, \ldots, \omega_r^{\#}, \quad \omega_{2r+1}, \ldots, \omega_l$$

— система фундаментальных весов. Пусть (V, f) — неприводимое комплексное представление алгебры $\mathfrak{g}$, имеющее старший вес ω, равный

$$\omega = n_1\omega_1 + \cdots + n_r\omega_r + n_r'\omega_1^{\#} + \cdots + n_r'\omega_r^{\#} + n_{2r+1}\omega_{2r+1} + \cdots + n_l\omega_l.$$

Тогда $f \sim \bar{f}$ в том и только том случае, если $n_1 = n_1', \ldots, n_r = n_r'$. В этом случае

$$\gamma(f) = \gamma(\omega_{2r+1})^{n_{2r+1}} \ldots \gamma(\omega_l)^{n_l}.$$

Доказательство. Это следует из (7.10.3) и (7.10.4). □

Упражнение 1. Пусть (V, f) — комплексное самосопряженное представление алгебры $\mathfrak{g}$ и J — взаимно-однозначное полулинейное отображение пространства V на себя, коммутирующее с действием алгебры $\mathfrak{g}$. Показать, что если существует ненулевой вектор $v \in V$, для которого $Jv = v$, то $\gamma(f) = 1$.

Упражнение 2. Пусть (V, f) и J те же, что и в упр. 1. Допустим, что существует вес λ, такой что $\lambda = \bar{\lambda}$ и $\dim V(\lambda) = 1$. Показать, что $\gamma(f) = 1$.

Глава 8

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

8.1. Обозначения

На протяжении всей этой главы используются следующие обозначения:

$\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$,
$\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$,
$l = \operatorname{rank} \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}$,
Δ — корневая система алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$,
B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$,
E — вещественное векторное пространство, порожденное Δ.

Для $\lambda \in E$ определим $H_\lambda \in \mathfrak{h}$ формулой

$$B(H_\lambda, H) = \lambda(H) \qquad (H \in \mathfrak{h}).$$

В пространстве E имеется положительно-определенное скалярное произведение

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \lambda(H_\mu) = \mu(H_\lambda) \quad (\lambda, \mu \in E).$$

Для каждого $\alpha \in \Delta$ мы выбираем E_α таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{C}E_\alpha + \mathbb{C}E_{-\alpha} + \mathbb{C}E_\beta + \mathbb{C}E_{-\beta} + \ldots, \; [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0,$$

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha \quad \text{при} \quad H \in \mathfrak{h}, \; \alpha \in \Delta,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H_\alpha, \; B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1 \quad \text{при} \quad \alpha \in \Delta,$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad \text{если} \quad \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta,$$

где $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$ и $M_{\alpha,\beta} = (N_{\alpha,\beta})^2$ — положительное рациональное число (так что $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$);

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0, \quad \text{если} \quad \alpha, \beta \in \Delta, \; \alpha+\beta \neq 0 \quad \text{и} \quad \alpha+\beta \notin \Delta.$$

Для $H \in \mathfrak{h}_r = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha$ и $\lambda \in E$ имеем $\lambda(H) \in \mathbb{R}$. Мы полагаем

$$C_\alpha = E_\alpha + E_{-\alpha}, \quad S_\alpha = i(E_\alpha - E_{-\alpha}), \quad \mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_r,$$

где $i = \sqrt{-1}$. Зафиксировав какое-нибудь лексикографическое упорядоченное в E, положим

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{t} + \sum_{\alpha>0} (\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha).$$

Как мы знаем, $\mathfrak{u}$ является компактной вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{t}$ — подалгеброй Картана в $\mathfrak{u}$. Пусть τ обозначает сопряжение относительно $\mathfrak{u}$, т. е.

$$\tau(X + iY) = X - iY \quad \text{для} \quad X, Y \in \mathfrak{u}.$$

Тогда $\tau E_\alpha = E_{-\alpha}$.

Для удобства введем в $\mathfrak{h}$ новое скалярное произведение по формуле

$$(H_1, H_2) = -\frac{1}{(2\pi)^2} B(H_1, H_2) \quad (H_1, H_2 \in \mathfrak{h}).$$

Поскольку форма $B(H_1, H_2)$ положительно-определенна на $\mathfrak{h}_r$, это новое скалярное произведение положительно-определенно на $\mathfrak{t}$. Для $\lambda \in E$ положим

$$\varphi(\lambda) = 2\pi i H_\lambda \in \mathfrak{t}.$$

Ясно, что φ — изоморфизм векторного пространства E на $\mathfrak{t}$. Далее,

$$(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) = \frac{-1}{(2\pi)^2} B(2\pi i H_\lambda, 2\pi i H_\mu) = B(H_\lambda, H_\mu) = \langle \lambda, \mu \rangle,$$

так что φ является изометрией эвклидова пространства E на эвклидово пространство $\mathfrak{t}$. В дальнейшем, когда это нам будет удобно, мы будем отождествлять $\varphi(\lambda)$ с λ. В частности, корневую систему Δ можно рассматривать как подмножество в $\mathfrak{t}$ и $\langle \alpha, \beta \rangle = (\alpha, \beta)$ для $\alpha, \beta \in \Delta$. Таким образом,

(1) $\quad [H, E_\alpha] = 2\pi i (\alpha, H) E_\alpha \quad$ для $\quad H \in \mathfrak{h}$ и $\alpha \in \Delta$,

(2) $\quad (\exp(\operatorname{ad} H)) E_\alpha = (\exp 2\pi i (\alpha, H)) E_\alpha$.

В частности, для $H \in \mathfrak{t}$

$$(\exp(\operatorname{ad} H)) E_\alpha = E_\alpha \Leftrightarrow (\alpha, H) \in \mathbb{Z}.$$

В соответствии с (1) и (2) имеют место формулы

$$(1) \quad \begin{cases} [H, C_\alpha] = 2\pi(\alpha, H) S_\alpha, \\ [H, S_\alpha] = -2\pi(\alpha, H) C_\alpha, \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} \exp(\operatorname{ad} H)) C_\alpha = \cos 2\pi(\alpha, H) C_\alpha + \sin 2\pi(\alpha, H) S_\alpha, \\ (\exp(\operatorname{ad} H)) S_\alpha = -\sin 2\pi(\alpha, H) C_\alpha + \cos 2\pi(\alpha, H) S_\alpha. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(\exp(\operatorname{ad} H)) - 1\,(\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha,\ H) \in \mathbb{Z}.$$

Далее, пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — совокупность всех простых корней в Δ относительно выбранного упорядочения; π образует базис в E (или $\mathfrak{t}$) над $\mathbb{R}$ и базис в $\mathfrak{h}^*$ (или $\mathfrak{h}$) над $\mathbb{C}$.

Предположим теперь, что алгебра $\mathfrak{g}$ проста. Старший корень будет обозначаться через

$$-\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \ldots + m_l\alpha_l.$$

Тогда $m_1, \ldots, m_l$ — положительные целые числа, и всякий положительный корень β можно записать в виде

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l \quad (0 \leqslant n_i \leqslant m_i)$$

(см. (5.6.5)).

Множество $\tilde{\pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ мы будем называть *расширенной системой простых корней.*

8.2. Подалгебры максимального ранга в компактной алгебре Ли

Пусть $\mathfrak{v}$ — компактная алгебра Ли и $\mathfrak{k}$ — подалгебра в $\mathfrak{v}$. Напомним результаты §§ 4.3 и 4.6. Подалгебра $\mathfrak{k}$ компактна. Всякая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{k}$ абелева и содержится в некоторой максимальной абелевой подалгебре (= подалгебре Картана) алгебры $\mathfrak{v}$. Следовательно, $\operatorname{rank}\mathfrak{k} \leqslant \operatorname{rank}\mathfrak{v}$. В случае когда $\operatorname{rank}\mathfrak{k} = \operatorname{rank}\mathfrak{v}$, $\mathfrak{k}$ называют *подалгеброй максимального ранга.*

Пусть $\mathfrak{z}$ обозначает центр алгебры $\mathfrak{v}$. Тогда

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{z} \text{ (прямая сумма идеалов)},$$

где алгебра $\mathfrak{u} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}]$ полупроста. Пусть $\mathfrak{k}$ — подалгебра максимального ранга в $\mathfrak{v}$, а $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{k}$. Тогда $\mathfrak{t}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{t}$. Следовательно, $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{u}) \oplus \mathfrak{z}$, $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}) \oplus \mathfrak{z}$ и $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{u}$ содержит подалгебру Картана $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}$ алгебры $\mathfrak{u}$. Поэтому для изучения подалгебр максимального ранга в $\mathfrak{v}$ достаточно рассмотреть подалгебры максимального ранга в $\mathfrak{u}$.

Пусть $\mathfrak{u}$ — компактная полупростая алгебра Ли. Зафиксируем какую-нибудь подалгебру Картана $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{u}$ и обозначим через Φ совокупность всех подалгебр алгебры $\mathfrak{u}$, содержащих $\mathfrak{t}$. Пусть $\mathfrak{k}$ — подалгебра максимального ранга в $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{t}_1$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{k}$. Тогда найдется автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$, для которого $\sigma\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}$ и $\sigma\mathfrak{k} \in \Phi$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексификация алгебры $\mathfrak{u}$. Для любого подпространства $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{u}$ обозначим через $\mathfrak{p}^c$ его комплексную линей-

ную оболочку в $\mathfrak{g}$. Пространство $\mathfrak{p}^c$ естественно отождествляется с комплексификацией пространства $\mathfrak{p}$. Как мы знаем, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^c$ есть подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Далее будут использоваться обозначения, введенные в § 8.1.

Для любой подалгебры $\mathfrak{k} \in \Phi$ ее комплексификация $\mathfrak{k}^c$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, такой что $\mathfrak{k}^c \supset \mathfrak{t}^c = \mathfrak{h}$ и $\tau\mathfrak{k}^c = \mathfrak{k}^c$, где τ — сопряжение в $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{u}$. Пусть Φ^c обозначает совокупность всех подалгебр $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{h} \quad \text{и} \quad \tau(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

Тогда для $\mathfrak{a} \in \Phi^c$ имеем $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{u} \in \Phi$, и отображение $\Phi \ni \mathfrak{k} \mapsto \mathfrak{k}^c \in \Phi^c$ взаимно-однозначно и сюръективно.

Далее, для всякого $\mathfrak{k} \in \Phi$ положим

$$\Delta(\mathfrak{k}) = \{\alpha \in \Delta : E_\alpha \in \mathfrak{k}^c\}.$$

Если $\alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{k})$ и $\alpha + \beta \in \Delta$, то $E_{\alpha+\beta} = (N_{\alpha,\beta})^{-1}[E_\alpha, E_\beta] \in \mathfrak{k}^c$ и $\alpha + \beta \in \Delta(\mathfrak{k})$. Кроме того, поскольку $\tau E_\alpha = E_{-\alpha}$, соотношение $\alpha \in \Delta(\mathfrak{k})$ влечет $-\alpha \in \Delta(\mathfrak{k})$. Будем называть подмножество D системы Δ *подсистемой*, если

$$(D + D) \cap \Delta \subset D \text{ и } D = -D.$$

Всякая подсистема в Δ является корневой системой. Обозначим через Φ^Δ множество всех подсистем в Δ. Тогда $\Delta(\mathfrak{k}) \in \Phi^\Delta$ для $\mathfrak{k} \in \Phi$.

Пусть $\mathfrak{k} \in \Phi$ и $X \in \mathfrak{k}^c$. Тогда X можно записать в виде

$$X = X_0 + X_1 + \ldots + X_h,$$

$$X_0 \in \mathfrak{h}, \quad 0 \neq X_j \in \mathbb{C}E_{\beta_j} \quad (j = 1, \ldots, h),$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_h$ — различные корни. Выберем элемент H_0 алгебры $\mathfrak{h}$, для которого все числа $\beta(H_0)$, $\beta \in \Delta$ различны. Тогда

$$(\operatorname{ad} H_0)^j (X - X_0) = \beta_1(H_0)^j X_1 + \cdots + \beta_h(H_0)^j X_h \in \mathfrak{k}^c,$$

и определитель матрицы

$$((\beta_i(H_0)^j), \quad i = 1, \ldots, h, \quad j = 0, \ldots, h-1,$$

не обращается в нуль. Пусть (b_{ij}) — матрица, обратная к $(\beta_i(H_0)^j)$. Тогда

$$X_i = \sum_{j=0}^{h-1} b_{ji} (\operatorname{ad} H_0)^j (X - X_0) \in \mathfrak{k}^c$$

и $\beta_i \in \Delta(\mathfrak{k})$ для $i = 1, \ldots, h$. Таким образом,

$$\mathfrak{k}^c = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{k})} \mathbb{C}E_\alpha,$$

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{k})} (\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha).$$

Эти результаты можно переформулировать следующим образом:

(8.2.1) $\Phi \longrightarrow \Phi^c \longrightarrow \Phi^\Delta, \quad \mathfrak{k} \longmapsto \mathfrak{k}^c \longmapsto \Delta(\mathfrak{k})$

есть последовательность взаимно-однозначных сюръективных отображений.

(8.2.2) *Пусть* $\mathfrak{k}_1$ *и* $\mathfrak{k}_2$ *принадлежат* Φ. *Они сопряжены относительно* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ (*соотв.* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$) *в том и только том случае, когда существует элемент* $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$ (*соотв.* $\mathrm{Aut}(\Delta)$), *такой что* $S\Delta(\mathfrak{k}_1) = \Delta(\mathfrak{k}_2)$.

Доказательство. Допустим, что $\sigma\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2$ для некоторого $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ (соотв. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$). Тогда $\sigma\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{k}_2$ и найдется $\rho \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{k}_2)$, для которого $\rho\sigma\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$. Согласно упр. 4 § 4.4, ρ продолжается до внутреннего автоморфизма алгебры $\mathfrak{u}$. Мы можем поэтому считать, что $\rho \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u}) \subset \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$. В обозначениях § 5.3, пусть f — гомоморфизм группы $N(\mathfrak{h}) = \{\mu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\colon \mu\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\}$ на $\mathrm{Aut}(\Delta)$. Полагая $f(\rho\sigma) = S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$ (соотв. $\mathrm{Aut}(\Delta)$), получаем, что $\rho\sigma E_\beta \in \mathbb{C}E_{S\beta}$. Следовательно, $S\Delta(\mathfrak{k}_1) = \Delta(\mathfrak{k}_2)$.

Обратно, допустим, что $S\Delta(\mathfrak{k}_1) = \Delta(\mathfrak{k}_2)$ для некоторого $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$ (соотв. $\mathrm{Aut}(\Delta)$). Выберем элемент $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ (соотв. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$), такой что $\sigma\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$ и $f(\sigma) = S$. Тогда для $\alpha \in \Delta(\mathfrak{k}_1)$ имеем $\sigma E_\alpha \in \mathbb{C}E_{S\alpha} \subset \mathfrak{k}_2$ и $\sigma\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}_2$. ▯

Для произвольного подмножества A алгебры $\mathfrak{t}$ положим

$$A^\perp = \{H \in \mathfrak{t}\colon (\lambda, H) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \lambda \in A\}.$$

Очевидно, $A^\perp$ является подмодулем (= аддитивной подгруппой) векторного пространства $\mathfrak{t}$. Положим, далее,

$$Z(\mathfrak{k}) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})\colon (\sigma - 1)\mathfrak{k} = 0\} \quad \text{для} \quad \mathfrak{k} \in \Phi.$$

Пусть $N_\mathfrak{u}(\mathfrak{t}) = N(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$ и $f_\mathfrak{u}$ — ограничение гомоморфизма f на $N_\mathfrak{u}(\mathfrak{t})$. Тогда $Z(\mathfrak{k})$ принадлежит ядру гомоморфизма $f_\mathfrak{u}\colon N_\mathfrak{u}(\mathfrak{t}) \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ и потому $Z(\mathfrak{k}) \subset \exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{t})$ (см. упражнение к § 5.4). Поскольку $\exp \mathrm{ad}\, H \in Z(\mathfrak{k})$ тогда и только тогда, когда $(\alpha, H) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Delta(\mathfrak{k})$, мы имеем

(8.2.3) $Z(\mathfrak{k}) = \exp(\mathrm{ad}(\Delta(\mathfrak{k})^\perp))$.

Нам понадобится следующая лемма:

(8.2.4) *Пусть* D *— подсистема системы* $\Delta \subset \mathfrak{t}$. *Обозначим через* $\{D\}_\mathbb{Z}$ *подмодуль в* $\mathfrak{t}$, *порожденный* D. *Тогда*

$$\{D\}_\mathbb{Z} \cap \Delta = D.$$

Доказательство. Пусть β принадлежит $\{D\}_Z \cap \Delta$, и пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — какая-нибудь фундаментальная система в D. Меняя в случае необходимости нумерацию $\{\alpha_i\}$, мы можем считать, что

$$\beta = (c_1\alpha_1 + \cdots + c_s\alpha_s) - (d_1\alpha_{s+1} + \cdots + d_t\alpha_{s+t}),$$

где $s + t \leqslant k$ и $c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_t$ — натуральные числа. Положим $|\beta| = c_1 + \ldots + c_s + d_1 + \ldots + d_t$ и докажем индукцией по $|\beta|$, что $\beta \in D$. Если $|\beta| = 1$, то $\beta = \pm\alpha_j \in D$.

Предположим, что $\beta - \alpha_i \notin \Delta$ для $i = 1, \ldots, s$ и $\beta + \alpha_{s+j} \notin \Delta$ для $j = 1, \ldots, t$. Тогда, рассматривая α_i-последовательность и α_{s+j}-последовательность, проходящие через β, мы получим на основании (2.3.2), что

$$(\beta, \alpha_i) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, s, \quad \text{и} \quad (\beta, \alpha_{s+j}) \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, t.$$

Следовательно,

$$(\beta, \beta) = \sum_{i=1}^{s} c_i (\beta, \alpha_i) - \sum_{j=1}^{t} d_j (\beta, \alpha_{s+j}) \leqslant 0$$

и $\beta = 0$, — противоречие. Поэтому хотя бы один из элементов $\beta - \alpha_1, \ldots, \beta - \alpha_s, \beta + \alpha_{s+1}, \ldots, \beta + \alpha_{s+t}$ (обозначим его через γ) должен принадлежать Δ. Тогда $|\gamma| = |\beta| - 1$ и по предположению индукции $\gamma \in D$. Следовательно, $\beta \in (D + D) \cap \Delta \subset D$. $\square$

Пусть $\mathfrak{m}$ — произвольное подмножество алгебры $\mathfrak{t}$. Определим $\mathfrak{m}^{\#} \subset \Delta$ формулой

$$\mathfrak{m}^{\#} = \{\alpha \in \Delta\colon (\alpha, H) \in \mathbb{Z} \quad \text{для всех} \quad H \in \mathfrak{m}\}.$$

Из этого определения сразу следует, что $-\mathfrak{m}^{\#} = \mathfrak{m}^{\#}$ и $(\mathfrak{m}^{\#} + \mathfrak{m}^{\#}) \cap \Delta \subset \mathfrak{m}^{\#}$. Следовательно, $\mathfrak{m}^{\#}$ — подсистема в Δ.

(8.2.5) 1) *Для любого подмножества* $\mathfrak{m}$ *алгебры* $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{m}^{\#} \subset \Phi^{\Delta}.$$

2) *Для* $D \in \Phi^{\Delta}$

$$D^{\perp\#} = D.$$

3) *Для* $D_1, D_2 \in \Phi^{\Delta}$

$$D_1^{\perp} \underset{\neq}{\supset} D_2^{\perp} \Leftrightarrow D_1 \underset{\neq}{\subset} D_2.$$

4) *Для* $\mathfrak{k} \in \Phi$

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{u}\colon (\sigma - 1) X = 0 \quad \text{для всех} \quad \sigma \in Z(\mathfrak{k})\}.$$

Доказательство. 2) То что $D^{\perp\#} \supset D$, очевидно, Пусть β принадлежит $D^{\perp\#}$, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — какая-нибудь фундаменталь-

ная система в D. Предположим вначале, что множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta\}$ линейно-независимо над $\mathbb{R}$. Тогда найдется элемент $H_0 \in \mathfrak{t}$, для которого

$$(\alpha_1, H_0) = \cdots = (\alpha_k, H_0) = 0 \quad \text{и} \quad (\beta, H_0) \notin \mathbb{Z}.$$

Поскольку $(\alpha_1, H_0) = \ldots = (\alpha_k, H_0) = 0$, мы имеем $H_0 \in D^\perp$, а так как $\beta \in D^{\perp\#}$, то $(\beta, H_0) \in \mathbb{Z}$, — противоречие. Следовательно,

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k \quad (c_i \in \mathbb{R}).$$

Выберем такие элементы $H_1, \ldots, H_k \in \mathfrak{t}$, что $(\alpha_i, H_j) = \delta_{ij}$. Тогда все H_j принадлежат $D^\perp$ и $(\beta, H_j) = c_j \in \mathbb{Z}$. Значит, $\beta \in \{D\}_\mathbb{Z}$ и, в силу (8.2.4), $\beta \in D$.

3) Очевидно, что из $D_1 \subset D_2$ следует, что $D_1^\perp \supset D_2^\perp$. Если $D_1^\perp \supset D_2^\perp$, то $D_1 = D_1^{\perp\#} \subset D_2^{\perp\#} = D_2$. Аналогично из $D_1^\perp = D_2^\perp$ вытекает, что $D_1 = D_2$.

4) Положим

$$\mathfrak{k}_1 = \{X \in \mathfrak{u}\colon (\sigma - 1)X = 0 \quad \text{для всех} \quad \sigma \in Z(\mathfrak{k})\} \in \Phi.$$

Согласно (8.2.3), корень α принадлежит $\Delta(\mathfrak{k}_1)$ тогда и только тогда, когда $(\alpha, H) \in \mathbb{Z}$ для всех $H \in \Delta(\mathfrak{k})^\perp$. Следовательно,

$$\Delta(\mathfrak{k}_1) = \Delta(\mathfrak{k})^{\perp\#} = \Delta(\mathfrak{k}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}. \ \square$$

(8.2.6) *Для всякого максимального элемента $\mathfrak{k}$ множества $\Phi\setminus\{\mathfrak{u}\}$, упорядоченного по включению, найдется элемент $H \in \mathfrak{t}$, такой что*

1) $\Delta(\mathfrak{k}) = H^\#$, где $H^\# = \{H\}^\#$,

2) $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{u} : (\exp \operatorname{ad} H - 1)X = 0\}$.

Доказательство. В силу (8.2.5), 3), $\Delta(\mathfrak{k})$ есть максимальный элемент множества $\Phi^\Delta\setminus\{\Delta\}$, и в частности $\Delta(\mathfrak{k})^\perp \supsetneq \Delta^\perp$. Следовательно, существует элемент $H \in \mathfrak{t}$, удовлетворяющий условиям $\Delta(\mathfrak{k})^\perp \ni H \notin \Delta^\perp$. Из того, что $H \in \Delta(\mathfrak{k})^\perp$, следует, что $\Delta(\mathfrak{k}) = \Delta(\mathfrak{k})^{\perp\#} \subset H^\#$. Поскольку $H \notin \Delta^\perp$, можно найти такой корень $\alpha \in \Delta$, что $(\alpha, H) \notin \mathbb{Z}$, т. е. $\alpha \notin H^\#$. Так как $\Delta(\mathfrak{k})$ максимально, то $\Delta(\mathfrak{k}) = H^\#$.

То что $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{u}\colon (\exp \operatorname{ad} H - 1) X = 0\}$, вытекает из равенства $\Delta(\mathfrak{k}) = H^\#$.

Упражнение 1. Пусть $\mathfrak{v}$ — компактная алгебра Ли. Тогда число подалгебр максимального ранга с точностью до действия группы $\operatorname{Ad}(\mathfrak{v})$ конечно.

Упражнение 2. Пусть $\mathfrak{v}$ — компактная алгебра Ли:

$\mathfrak{v} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_k$ (прямая сумма идеалов),

где $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{v}$, а подалгебры $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_k$ просты. Пусть $\mathfrak{k}$ — подалгебра максимального ранга в $\mathfrak{v}$. Тогда найдется такая подалгебра $\mathfrak{k}_0$ максимального ранга в одной из алгебр $\mathfrak{u}_j$, что

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{u}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_{j-1} \oplus \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{u}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_k.$$

Упражнение 3. Пусть $\mathfrak{v}$ — компактная алгебра Ли, а $\mathfrak{k}$ — подалгебра максимального ранга в $\mathfrak{v}$. Тогда нормализатор $\mathfrak{n}$ подалгебры $\mathfrak{k}$ совпадает с $\mathfrak{k}$. [*Указание*. Ввиду полной приводимости множества $\{\operatorname{ad} X\colon\ X \in \mathfrak{k}\}$ найдется такое подпространство $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{n}$, что $\mathfrak{n} = \mathfrak{k} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} = 0$ и $[\mathfrak{k}, \mathfrak{q}] = 0$. Докажите, что $\mathfrak{q} = 0$, используя тот факт, что $\mathfrak{q}$ содержит некоторую подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{n}$.]

8.3. Явное определение максимальных подалгебр максимального ранга в компактной простой алгебре Ли (теория Бореля — Зибенталя)

В этом параграфе мы предполагаем, что $\mathfrak{u}$ — компактная простая алгебра Ли, и сохраняем обозначения предыдущих параграфов. Пусть $\mathfrak{k}$ — какой-нибудь максимальный элемент в $\Phi \setminus \{\mathfrak{u}\}$. Тогда можно найти $H \in \mathfrak{t}$, для которого

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{u}\colon\ (\exp \operatorname{ad} H - 1)\, X = 0\}.$$

Будем говорить в этом случае, что H *задает* $\mathfrak{k}$. Прежде всего мы рассмотрим вопрос о выборе элемента H, задающего подалгебру, сопряженную к $\mathfrak{k}$.

Поскольку ядром гомоморфизма

$$\mathfrak{t} \ni X \longmapsto \exp \operatorname{ad} X \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$$

является $\Gamma = \Delta^{\perp}$, мы можем заменить H на $H + X$ $(X \in \Gamma)$.

Пусть S принадлежит $\operatorname{Ad}(\Delta)$ (соотв. $\operatorname{Aut}(\Delta)$). Тогда S можно продолжить до автоморфизма $\sigma \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$ (соотв. $\operatorname{Aut}(\mathfrak{u})$) и для $X \in \mathfrak{u}$

$$(\exp \operatorname{ad}(\sigma H)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} [\sigma H, [\ldots, [\sigma H, \sigma X] \ldots]]$$

$$= \sigma \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} [H, [\ldots, [H, X] \ldots]] = \sigma (\exp \operatorname{ad} H \cdot X)$$

Следовательно, $(\exp \operatorname{ad} H - 1)\ X = 0$ тогда и только тогда, когда $(\exp \operatorname{ad} (\sigma H) - 1)\, \sigma X = 0$, и

$$\sigma\mathfrak{k} = \{\sigma X\colon (\exp \operatorname{ad} H - 1)\, X = 0\}$$

$$= \{X\colon (\exp \operatorname{ad} (\sigma H) - 1)\, X = 0\},$$

т. е. элемент $\sigma H = SH$ задает $\sigma\mathfrak{k}$.

Далее, обозначим для любого $Y \in \Gamma$ через $T(Y)$ преобразование переноса на Y в $\mathfrak{t}$:

$$\mathfrak{t} \ni H \mapsto T(Y)H = H + Y \in \mathfrak{t},$$

и положим $T(\Gamma) = \{T(Y) : Y \in \Gamma\}$. В гл. 5 мы видели, что $\mathrm{Af}(\Delta) = \mathrm{Aut}(\Delta)\cdot T(\Gamma)$ есть группа изометрий эвклидова пространства $\mathfrak{t}$, $\mathrm{Ad}(\Delta)\cdot T(\Gamma)$ — ее подгруппа и что подгруппа $\mathrm{Afd}(\Delta)$ группы $\mathrm{Ad}(\Delta)\cdot T(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве всех клеток. Пусть C_0 обозначает фундаментальную клетку:

$$C_0 = \{H \in \mathfrak{t}: (\alpha_1, H) > 0, \ldots, (\alpha_l, H) > 0 \text{ и } (-\alpha_0, H) < 1\}.$$

Тогда, в силу (5.6.7), для любого $H \in \mathfrak{t}$ найдется такой автоморфизм $v \in \mathrm{Afd}(\Delta)$, что $H \in \overline{UC_0}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

(8.3.1) *Предположим, что элемент H из $\mathfrak{t}$ задает $\mathfrak{k}$. Тогда можно найти $Y \in \Gamma$ и $\sigma \in N(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, такие что элемент $H' = \sigma(H - Y)$ задает $\sigma\mathfrak{k}$, причем*

$$(\alpha_1, H') \geqslant 0, \ldots, (\alpha_l, H') \geqslant 0 \text{ и } (-\alpha_0, H') \leqslant 1.$$

Напомним, что $-\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \ldots + m_l\alpha_l$ — старший корень и $\tilde{\pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — расширенная система простых корней.

(8.3.2) *Пусть $\mathfrak{k}$ — максимальная подалгебра максимального ранга, задаваемая элементом $H \in C_0$: $\Delta(\mathfrak{k}) = H^{\#}$. Тогда $\pi(\mathfrak{k}) = \tilde{\pi} \cap \Delta(\mathfrak{k})$ является системой простых корней в $\Delta(\mathfrak{k})$ относительно некоторого упорядочения.*

Доказательство. Мы докажем, что всякий элемент β множества $\Delta(\mathfrak{k})$ можно записать в виде линейной комбинации корней из $\pi(\mathfrak{k})$ с целыми коэффициентами, которые либо все $\geqslant 0$, либо все $\leqslant 0$. Достаточно рассмотреть случай положительного β.

a) $\alpha_0 \notin \Delta(\mathfrak{k})$. Так как $(\alpha_0, H) \notin \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant (-\alpha_0, H) \leqslant 1$, то $0 < (-\alpha_0, H) < 1$. Пусть $\beta = b_1\alpha_1 + \ldots + b_l\alpha_l \in \Delta(\mathfrak{k})$ — положительный корень. Тогда

$$0 \leqslant b_1(\alpha_1, H) + \ldots + b_l(\alpha_l, H) = (\beta, H) \leqslant -(\alpha_0, H) < 1.$$

Так как (β, H) — целое число, то $(\beta, H) = 0$ и $b_1(\alpha_1, H) = \ldots = b_l(\alpha_l, H) = 0$. Следовательно, если $b_j > 0$, то $(\alpha_j, H) = 0$ и $\alpha_j \in \Delta(\mathfrak{k})$, т. е. β есть линейная комбинация корней $\alpha_j \in \Delta(\mathfrak{k})$ с неотрицательными коэффициентами.

(b) $\alpha_0 \in \Delta(\mathfrak{k})$. В этом случае $-(\alpha_0, H) = 0$ или 1. Если бы $(\alpha_0, H) = 0$, то мы имели бы $(\alpha_1, H) = \ldots = (\alpha_l, H) = 0$ и $H = 0$, — противоречие. Следовательно, $-(\alpha_0, H) = 1$. Пусть $\beta = b_1\alpha_1 + \ldots + b_l\alpha_l > 0$ принадлежит $\Delta(\mathfrak{k})$. Тогда $(\beta, H) = 0$ или 1.

Если $(\beta, H) = 0$, то, как и в случае (a), получаем, что β есть линейная комбинация корней $\alpha_j \in \Delta(\mathfrak{k})$ с неотрицательными целыми коэффициентами.

Если $(\beta, H) = 1$, то $-(\alpha_0, H) = 1$ и

$$(-\alpha_0 - \beta, H) = (m_1 - b_1)(\alpha_1, H) + \ldots + (m_l - b_l)(\alpha_l, H) = 0.$$

Поскольку $m_j \geqslant b_j$ и $(\alpha_j, H) \geqslant 0$, мы имеем $\alpha_j \in \Delta(\mathfrak{k})$, как только $m_j - b_j > 0$. Следовательно,

$$\beta = -\alpha_0 - (m_1 - b_1)\alpha_1 - \ldots - (m_l - b_l)\alpha_l$$

есть линейная комбинация элементов из $\Delta(\mathfrak{k}) \cap \tilde{\pi}$ с неположительными целыми коэффициентами. $\square$

Напомним, что card Σ для любого конечного множества Σ обозначает число его элементов.

(8.3.3) card $\pi(\mathfrak{k}) = l - 1$ *или* l, *причем*

(I) *в случае когда* card $\pi(\mathfrak{k}) = l$, *алгебра* $\mathfrak{k}$ *полупроста*,

(II) *в случае когда* card $\pi(\mathfrak{k}) = l - 1$, *алгебра* $\mathfrak{k}$ *является прямой суммой одномерного центра* $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ *и полупростого идеала* $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$.

Доказательство. Так как $\pi(\mathfrak{k})$ не может содержать π, то card $\pi(\mathfrak{k}) \leqslant l$. Допустим, что card $\pi(\mathfrak{k}) \leqslant l - 2$. Выберем два корня α_i, α_j $(0 \leqslant i < j \leqslant l)$, не принадлежащих $\pi(\mathfrak{k})$. Множество $\pi(\mathfrak{k}) \cup \{\alpha_i, \alpha_j\}$ содержит не более чем l элементов и потому линейно-независимо. Следовательно, найдется элемент $H' \in \mathfrak{t}$, для которого

$$(\alpha_h, H') = 0, \text{ если } \alpha_h \in \pi(\mathfrak{k}) \text{ либо } h = i, \quad \text{и} \quad (\alpha_j, H') = \frac{1}{2}.$$

Тогда $H'^{\#} \underset{\neq}{\supset} H^{\#} = \Delta(\mathfrak{k})$, ибо $H'^{\#} \supset \pi(\mathfrak{k}) \cup \{\alpha_i\}$. С другой стороны, $\alpha_j \notin H'^{\#}$. Это противоречит максимальности $H^{\#} = \Delta(\mathfrak{k})$. Значит, card $\pi(\mathfrak{k}) = l - 1$ или l.

Пусть $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ — центр алгебры $\mathfrak{k}$. Тогда $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{t}$ и

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = \{X \in \mathfrak{t}\colon (\alpha, X) = 0 \text{ для всех } \alpha \in \pi(\mathfrak{k})\}.$$

Следовательно, $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = l - \text{card}\, \pi(\mathfrak{k}) = 0$ (если card $\pi(\mathfrak{k}) = l$) или 1 (если card $\pi(\mathfrak{k}) = l - 1$). $\square$

Докажем теперь один результат о скалярных произведениях на корневых системах. Чтобы избежать недоразумений, мы повторим ранее введенные обозначения.

(8.3.4) *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли над* $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ — *ее подалгебра Картана*, Δ — *корневая система алгебры* $\mathfrak{g}$ *относительно* $\mathfrak{h}$ *и* E — *линейная оболочка множества* Δ *над* $\mathbb{R}$. *Далее, пусть*

$\mathfrak{u}$ — *компактная вещественная форма алгебры* $\mathfrak{g}$. *Пусть, наконец,* φ — *инвариантная билинейная форма на* $\mathfrak{g}$, *ограничение которой на* $\mathfrak{u}$ *отрицательно-определенно. Определим скалярное произведение в* F *формулой*

$$\langle\lambda, \mu\rangle_\varphi = \varphi(H_\lambda, H_\mu) \text{ для } \lambda, \mu \in E.$$

Это скалярное произведение положительно-определенно, и

$$(1) \qquad \frac{\langle\alpha, \beta\rangle_\varphi}{\langle\beta, \beta\rangle_\varphi} = \frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle} \text{ для } \alpha, \beta \in \Delta.$$

(*Напомним, что скалярное произведение* $\langle\alpha, \beta\rangle = (\alpha, \beta)$ *было определено как* $\langle\alpha, \beta\rangle_B$, *где* B — *форма Киллинга алгебры* $\mathfrak{g}$.)

В частности, для любого точного представления ψ *алгебры* $\mathfrak{g}$ *мы можем рассматривать*

$$B_\psi(H_\alpha, H_\beta) = \operatorname{tr} \psi(H_\alpha)\psi(H_\beta)$$

как скалярное произведение в Δ.

Доказательство. Из включения $\{H_\lambda\colon \lambda \in E\} \subset \sqrt{-1}\,\mathfrak{u}$ видно, что $\langle\lambda, \mu\rangle_\varphi$ положительно-определенно. Поскольку форма φ невырожденна на $\mathfrak{u}$, она невырожденна и на $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$ — разложение алгебры $\mathfrak{g}$ на простые идеалы. Обозначим через φ_j ограничение φ на $\mathfrak{g}_j$ ($j = 1, \ldots, k$). В силу (1.5.3), $\varphi(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, для $X_j, Y_j \in \mathfrak{g}_j$, $j = 1, \ldots, k$, мы имеем

$$\varphi(X_1 + \ldots + X_k, Y_1 + \ldots + Y_k) = \varphi_1(X_1, Y_1) + \ldots + \varphi_k(X_k, Y_k)$$

Это соотношение мы будем записывать в виде $\varphi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_k$.

Для каждого $j = 1, \ldots, k$ пусть $\mathfrak{h}_j'$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_j$. Тогда $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_1' + \ldots + \mathfrak{h}_k'$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. В силу сопряженности подалгебр Картана (см. 4.6.4)), существует $\theta \in \operatorname{Ad}(\mathfrak{g})$, для которого $\theta\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Следовательно, $\mathfrak{h} = \theta\mathfrak{h}_1' + \ldots + \theta\mathfrak{h}_k'$. С другой стороны, так как $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})\,\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}_j$, то $\operatorname{Ad}(\mathfrak{g})\,\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_j$ и $\theta\mathfrak{h}_j' \subset \mathfrak{g}_j$. Следовательно, $\mathfrak{h}_j = \theta\mathfrak{h}_j' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_j$ есть подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_j$ и

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \ldots + \mathfrak{h}_k, \quad \mathfrak{h}_j = \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{h}.$$

Аналогично из (4.5.4) мы получаем, что

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \ldots + \mathfrak{u}_k,$$

где $\mathfrak{u}_j = \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{u}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}_j$.

Обозначим через Δ_j корневую систему алгебры $\mathfrak{g}_j$ по отношению к подалгебре Картана $\mathfrak{h}_j$. Ясно, что Δ_j можно естественным образом отождествить с подмножеством системы Δ и

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j \text{ (дизъюнктное объединение).}$$

Пусть E_j — линейная оболочка системы Δ_j над $\mathbb{R}$. Тогда

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$$

и $\langle E_i, E_j\rangle_\varphi = 0$ для $i \neq j$. Так как при этом $\langle E_i, E_j\rangle = 0$, то для доказательства формулы (1) достаточно рассмотреть случай, когда α и β принадлежат одной и той же подалгебре $\mathfrak{g}_j$. В этом случае $\langle\alpha, \beta\rangle$ совпадает со скалярным произведением в E_j, построенным по форме Киллинга алгебры $\mathfrak{g}_j$. Заметим также, что форма φ_j отрицательно-определенна на $\mathfrak{u}_j$.

Предположим теперь, что алгебра $\mathfrak{g}$ проста. Согласно упр. 5 § 1.5, $\varphi = cB$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$. С другой стороны, как φ, так и B отрицательно-определенны на $\mathfrak{u}$. Следовательно, $c > 0$.

Далее, в силу (3.3.1), 2), форма B_ψ невырожденна. Кроме того, ввиду (6.4.5) мы можем считать, что $\psi(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})\colon X + {}^t\overline{X} = 0\}$, откуда, в частности, следует, что $\operatorname{tr} X^2 \leqslant 0$ для любого $X \in \mathfrak{u}(n)$. □

Вернемся к нашей первоначальной задаче. Нам известно, что $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}^c] = [\mathfrak{k}^c, \mathfrak{k}^c]$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и $\Delta(\mathfrak{k})$ — ее корневая система. Так как $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]^c \ni X \mapsto \operatorname{ad} X \in \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ — точное представление, то, согласно (8.3.4), мы можем определить скалярное произведение в $\Delta(\mathfrak{k})$ формулой

$$(\alpha, \beta) = \operatorname{tr} \operatorname{ad} H_\alpha \operatorname{ad} H_\beta \quad \text{для } \alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{k}),$$

что совпадает со скалярным произведением на Δ. Таким образом, имеет место следующий результат:

(8.3.5) *В качестве скалярного произведения в $\Delta(\mathfrak{k})$ можно взять скалярное произведение (α, β) в Δ. В частности, диаграмма Дынкина системы $\pi(\mathfrak{k})$ получается из диаграммы Дынкина системы $\tilde{\pi}$ удалением вершин, соответствующих корням из $\tilde{\pi} \setminus \pi(\mathfrak{k})$, и ребер, у которых хотя бы один из концов принадлежит к числу этих вершин.*

Теперь рассмотрим по отдельности случаи (I) и (II из (8.3.3). Ввиду (8.3.2) мы предположим, что подалгебра $\mathfrak{k}$ задается элементом $H \in \overline{C_0}$.

(I) $\operatorname{card} \pi(\mathfrak{k}) = l$, и алгебра $\mathfrak{k}$ полупроста. Если $\pi(\mathfrak{k}) = \pi$, то $\Delta(\mathfrak{k}) = \Delta$ — противоречие. Следовательно, $\pi(\mathfrak{k}) = \tilde{\pi} \setminus \{\alpha_i\}$ для некоторого $i > 0$. Тогда $0 < (\alpha_i, H) < 1$, и поскольку $(-\alpha_0,$

$H) \geqslant m_i(\alpha_i, H)$, то $(-\alpha_0, H) = 1$. Далее, для $j > 0$, $j \neq i$, мы имеем $(\alpha_j, H) = 0$ или 1 и

$$m_j(\alpha_j, H) < m_j(\alpha_j, H) + m_i(\alpha_i, H) \leqslant -(\alpha_0, H) = 1.$$

Следовательно, $(\alpha_j, H) = 0$ и $m_i(\alpha_i, H) = -(\alpha_0, H) = 1$. Пусть $H_1, \ldots, H_l$ — базис в $\mathfrak{t}$, определяемый условием $(\alpha_s, H_t) = \delta_{st}$. Тогда $H = (1/m_i) H_i$, где $m_i > 1$, поскольку $(\alpha_i, H) > 1$.

Докажем, что m_i — простое число. Допустим, что $m_i = ab$, где a, b — натуральные числа, большие единицы. Тогда $H^\# \subset \subset (aH)^\#$. С другой стороны, последовательно применяя (2.6.1) к старшему корню, мы можем найти элемент $\beta = p_1\alpha_1 + \ldots + p_l\alpha_l \in \Delta$, для которого $p_i = b$. В самом деле, для корня $-\alpha_0$ найдется такой корень $\alpha_{j_1} \in \pi$, что $\beta_1 = -\alpha_0 - \alpha_{j_1} \in \Delta^+$, и для β_1 существует такой корень $\alpha_{j_2} \in \pi$, что $\beta_2 = \beta_1 - \alpha_{j_2} \in \Delta^+$, и т. д.; таким путем мы получаем последовательность $-\alpha_0 > \beta_1 > \ldots > \beta_k$ в Δ^+, последний член которой β_k есть простой корень. Так как $\beta_i - \beta_{i+1} \in \pi$, какие-то из корней β_j должны иметь требуемый вид. Тогда $(\beta, H) = p_i/m_i = 1/a \notin \mathbb{Z}$ и $\beta \notin H^\#$, но $\beta \in (aH)^\#$. Далее, $(\alpha_i, aH) = 1/b \notin \mathbb{Z}$ и $\alpha_i \notin (aH)^\#$. Следовательно, $\Delta(\mathfrak{k}) = H^\# \underset{\neq}{\subset} (aH)^\# \underset{\neq}{\subset} \Delta$, что противоречит максимальности системы $\Delta(\mathfrak{k})$.

Итак, мы показали, что $H = H_i/m_i$, где m_i — простое число.

Обратно, рассмотрим $D = (H_i/m_i)^\#$ для простого m_i. Ясно, что $D \cap \tilde{\pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_i, \ldots, \alpha_l\}$. Выберем максимальный элемент D' в Φ^Δ, удовлетворяющий условию $D \subset D'$. Найдется такой элемент $H' \ni \mathfrak{t}$, что $D' = (H')^\#$. Поэтому $(\alpha_j, H') \in \mathbb{Z}$ для $j > 0$, $j \neq i$ и $\sum_{j=1}^{l} m_j(\alpha_j, H') \in \mathbb{Z}$. Полагая $H'' = H' - \sum_{j \neq i}(\alpha_j, H') H_j$, получаем, что $(H'')^\# = (H')^\# = D'$ и $(\alpha_j, H'') = 0$ для $j = 0$, $j \neq i$. Следовательно, $H'' = cH_i$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Поскольку $H'' \notin \Gamma = \Delta^\perp$, число C не может быть целым, но $q = m_i\alpha_i(H'') = m_i c$ — целое число. Так как m_i просто, то найдется $r \in \mathbb{Z}$, такое что $qr \equiv 1 \pmod{m_i}$. Тогда $(rH'')^\# \supset (H'')^\# = D'$. С другой стороны,

$$rH'' = rcH_i = \frac{qr}{m_i} H_i \equiv \frac{H_i}{m_i} \pmod{\mathbb{Z}H_i} \text{ и } (rH'')^\# = \left(\frac{H_i}{H}\right)^\# = D,$$

т. е. $D = D'$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

(8.3.6) *В случае когда* card $\pi(\mathfrak{k}) = l$, *мы имеем* $\Delta(\mathfrak{k}) = (H_i/m_i)^\#$ *для некоторого* i, *такого что число* m_i *просто. Обратно, если* m_i *— простое число, то система* $(H_i/m_i)^\#$ *максимальна в* $\Phi^\Delta \setminus \{\Delta\}$ *и* $\tilde{\pi} \cap (H_i/m_i)^\# = \tilde{\pi} \setminus \{\alpha_i\}$.

Для случая (II) результат таков:

(8.3.7) *В случае когда* card $\pi(\mathfrak{k}) = l - 1$, *можно найти такой автоморфизм* $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, $\sigma(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$, *что* $\Delta(\sigma\mathfrak{k}) = (H_i/2)^{\#}$ *для некоторого* i, *такого что* $m_i = 1$. *Обратно, если* $m_i = 1$, *то система* $(H_i/2)^{\#}$ *максимальна в* $\Phi^{\Delta} \setminus \{\Delta\}$ *и* $\tilde{\pi} \cap (H_i/2)^{\#} = \pi \setminus \{\alpha_i\}$.

Доказательство. (a) Предположим, что $\pi(\mathfrak{k}) \not\ni \alpha_0$, так что $\pi(\mathfrak{k}) = \{\alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$. Поскольку $0 < -(\alpha_0, H) < 1$ и $0 < (\alpha_1, H)$, мы имеем $(\alpha_2, H) = \ldots = (\alpha_l, H) = 0$ и $H = cH_1$, $0 < c < 1$. Если $m_1 > 1$, то $\alpha_0 \in (H_1/m_1)^{\#} \setminus \Delta(\mathfrak{k})$ и $\alpha_1 \notin (H_1/m_1)^{\#}$, что противоречит максимальности $\Delta(\mathfrak{k})$. Следовательно, $m_1 = 1$. Но в этом случае для любого c, удовлетворяющего условию $0 < c < 1$,

$$(cH_1)^{\#} = \{p_1\alpha_1 + \ldots + p_l\alpha_l\colon\ p_1 = 0\}.$$

Поэтому можно взять $c = 1/2$.

(b) Допустим, что $\pi(\mathfrak{k}) \ni \alpha_0$, так что $\pi(\mathfrak{k}) = \{\alpha_0, \alpha_3, \ldots, \alpha_l\}$. Поскольку $0 < (\alpha_1, H)$, то $-(\alpha_0, H) = 1$ и для $j \geqslant 3$ мы имеем $(\alpha_j, H) < (\alpha_1, H) + (\alpha_j, H) \leqslant -(\alpha_0, H) = 1$, а также $\alpha_j(H) = 0$. Следовательно, $H = a_1H_1 + a_2H_2$, где

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \text{ и } m_1a_1 + m_2a_2 = 1.$$

Предположим, что $m_1 > 1$. Тогда $(H_1/m_1)^{\#} \supset \{\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$, но $\alpha_1 \notin (H_1/m_1)^{\#}$, что противоречит максимальности $\Delta(\mathfrak{k})$. Следовательно, $m_1 = 1$; по той же причине и $m_2 = 1$. Для любой пары вещественных чисел b_1, b_2, таких что $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ и $b_1 + b_2 = 1$, мы имеем

$$(b_1H_1 + b_2H_2)^{\#} = \{p_1\alpha_1 + \ldots + p_l\alpha_l \in \Delta\colon\ p_1 = p_2\},$$

ввиду того что p_1 и p_2 могут быть равны только 0 или ± 1. Таким образом, мы можем считать, что $H = (H_1 + H_2)/2$.

Положим $C_1 = T(-H_2)\,C_0 = \{X - H_2\colon X \in C_0\}$ *(см. рис. 7)*. Ясно, что C_1 — клетка. Так как вершины симплекса C_0 — это элементы $\{0, H_1/m_1, \ldots, H_l/m_l\}$ и $m_2 = 1$, то H_2 является вершиной C_0, а значит, 0 — вершиной C_1. Поэтому найдется такой элемент $S \in \mathrm{Ad}(\Delta)$, что

$$SW_1 = W_0 = \{X \in \mathfrak{k}\colon (\alpha_j, X) > 0 \quad \text{при } j = 1, \ldots, l\}.$$

С другой стороны, можно найти такое $\varepsilon > 0$, для которого

$$\{X \in W_r\colon |X| < \varepsilon\} \subset C_r \text{ при } r = 0,\ 1.$$

Следовательно, для элементов $X \in C_1$, достаточно близких к 0, $SX \in C_0$ и потому $SC_1 = C_0$. Положим $H' = ST(-H_2)\,H$, $= S(H_1 - H_2)/2$. Так как $H_1 - H_2$ — вершина симплекса C_1, то $2H' = S(H_1 - H_2)$ есть отличная от 0 вершина C_0 и, значит, $2H' = H_i/m_i$ для некоторого i. Пусть σ — элемент группы $N_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{k}) = N(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, для которого $f(\sigma) = S$. Тогда, как мы знаем из (8.3.1), H' задает $\sigma\mathfrak{k}$.

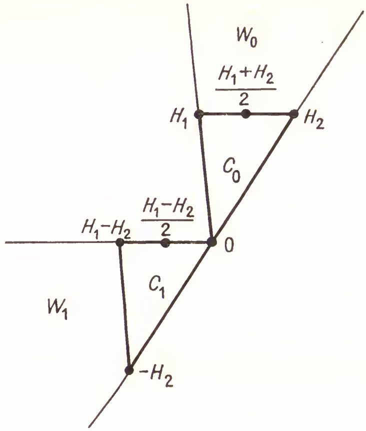


Рис. 7.

Докажем теперь, что $m_i = 1$. Очевидно, $(H')^\# \subset (H_i/m_i)^\#$. Если m_i больше 1 и не является простым числом, то, как было установлено при доказательстве теоремы (8.3.6), система $(H_i/m_i)^\#$ не максимальна. Если m_i — простое число, то card $(\tilde{\pi} \cap (H_i/m_i)^\#) = l$ и из того же доказательства теоремы (8.3.6) следует, что $(H')^\# \neq (H_i/m_i)^\#$, — противоречие. Следовательно, m_i должно быть равно 1 и $H' = H_i/2$.

(c) Предположим, что $m_i = 1$, и докажем, что система $(H_i/2)^\#$ максимальна.

Для удобства будем считать, что $i = 1$. Очевидно, $(H_1/2)^\# \cap \tilde{\pi} = \pi \setminus \{\alpha_1\}$ и, в силу (8.2.4),

$$\left(\frac{H_1}{2}\right)^\# = \mathbb{Z}\alpha_2 + \ldots + \mathbb{Z}\alpha_l) \cap \Delta$$

Пусть D — произвольная подсистема в Δ, для которой $(H_1/2)^\# \subsetneq D$. Поскольку $m_1 = 1$, система D должна содержать элемент β вида

$$\beta = \alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_l\alpha_l.$$

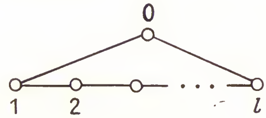
Для любого X из $D^\perp$ имеем $\beta(X), \alpha_2(X), \ldots, \alpha_l(X) \in \mathbb{Z}$ и потому $\alpha_1(X) \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\alpha_1 \in D^{\perp\#} = D$, а значит, $D = \Delta$. Это доказывает, что система $(H_1/2)^\#$ максимальна. $\square$

8.4. Таблица максимальных подалгебр максимального ранга в компактных простых алгебрах Ли

Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа. В случае когда m_i — простое число или 1, через $\mathfrak{k}_i$ обозначается подалгебра в $\mathfrak{u}$, задаваемая элементом H_i/m_i или $H_i/2$ соответственно. Как

мы видели выше, всякая максимальная подалгебра максимального ранга в $\mathfrak{u}$ сопряжена относительно группы Ad ($\mathfrak{u}$) с одной из подалгебр $\mathfrak{k}_1$. Прежде всего дадим классификацию подалгебр $\mathfrak{k}_i$ с точностью до изоморфизма [1].

A_l
($l \geqslant 1$)

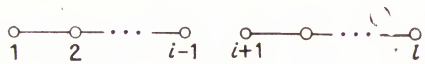


$$-\alpha_0 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l$$

(I) Подалгебр $\mathfrak{k}_i$ типа (I) нет.

(II) $\mathfrak{k}_i$: $i = 1, \ldots, [l/2]$ ($\mathfrak{k}_i \cong \mathfrak{k}_{l+1-i}$).

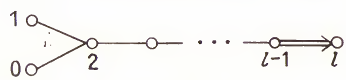
$\pi(\mathfrak{k}_i)$:



$$k_1 = \mathbb{R} \oplus A_{l-1},$$
$$k_i = \mathbb{R} \oplus A_{i-1} \oplus A_{l-1} \quad (i \geqslant 2),$$

где $\mathbb{R}$ обозначает одномерный центр.

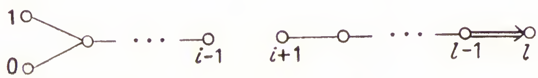
B_l
($l \geqslant 2$)



$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \ldots + \alpha_l)$$

(I) $\mathfrak{k}_i$: $i = 2, \ldots, l$.

$\pi(\mathfrak{k}_i)$:



$$\mathfrak{k}_2 = A_1 \oplus A_1 \oplus B_{l-2},$$
$$\mathfrak{k}_i = D_i \oplus B_{l-i} \quad (3 \leqslant i \leqslant l-1),$$
$$\mathfrak{k}_l = D_l.$$

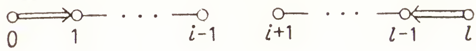
(II) $\mathfrak{k}_1 = \mathbb{R} \oplus B_{l-1}$.

C_l
($l \geqslant 3$)

$$-\alpha_0 = 2(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$$

[1] Различая каждый раз два типа ((I) и (II)) подалгебр $\mathfrak{k}_i$, описанные в (8.3.3). *Прим. ред.*

(I) $\mathfrak{k}_i$: $1 \leqslant i \leqslant [l/2]$ $(\mathfrak{k}_i \cong \mathfrak{k}_{l-1})$.

$\pi(\mathfrak{k}_i)$: 

$\mathfrak{k}_i = C_i \oplus C_{l-i}$.

(II) $\mathfrak{k}_l$.

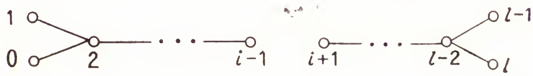
$\pi(\mathfrak{k}_l)$: 

$\mathfrak{k}_l = \mathbb{R} \oplus A_{l-1}$.

D_l
$(l \geqslant 4)$ 

$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \ldots + \alpha_{l-2}) + \alpha_{l-1} + \alpha_l$$

(I) $\mathfrak{k}_i$ $2 \leqslant i \leqslant (l+1)/2$ $(\mathfrak{k}_i \cong \mathfrak{k}_{l-i})$

$\pi(\mathfrak{k}_i)$: 

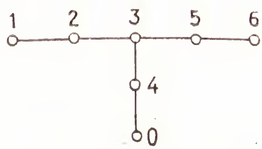
$\mathfrak{k}_2 = A_1 \oplus A_1 \oplus D_{l-2}$,

$\mathfrak{k}_i = D_i \oplus D_{l-i}$ $(i \geqslant 3)$.

(II) $\mathfrak{k}_1 = \mathbb{R} \oplus D_{l-1}$,

$\mathfrak{k}_l = \mathbb{R} \oplus A_{l-1}$ $(\cong k_{l-1})$.

В случае когда $l = 4$, $\mathfrak{k}_1 \cong \mathfrak{k}_l$.

E_6 

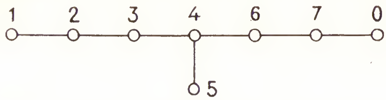
$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha$$

(I) $\mathfrak{k}_2 = A_1 \oplus A_5$ $(\cong \mathfrak{k}_4 \cong \mathfrak{k}_5)$,

$\mathfrak{k}_3 = A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$.

(II) $\mathfrak{k}_1 = \mathbb{R} \oplus D_5 \ (\cong \mathfrak{k}_6)$.

E_7



$$-\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7$$

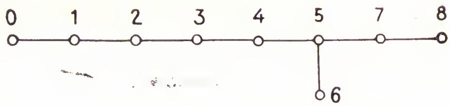
(I) $\mathfrak{k}_2 = A_1 \oplus D_6 \ (\cong \mathfrak{k}_7)$,

$\mathfrak{k}_3 = A_2 \oplus A_5 \ (\cong \mathfrak{k}_6)$,

$\mathfrak{k}_5 = A_7$.

(II) $\mathfrak{k}_1 = \mathbb{R} \oplus E_6$.

E_8



$$-\alpha_0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8$$

(I) $\mathfrak{k}_1 = A_1 \oplus E_7$,

$\mathfrak{k}_2 = A_2 \oplus E_6$,

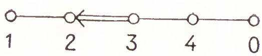
$\mathfrak{k}_4 = A_4 \oplus A_4$,

$\mathfrak{k}_6 = A_8$,

$\mathfrak{k}_8 = D_8$.

(II) Нет.

F_4



$$-\alpha_0 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

(I) $\mathfrak{k}_1 = B_4$,

$\mathfrak{k}_3 = A_2 \oplus A_2$,

$\mathfrak{k}_4 = A_1 \oplus C_3$.

(II) Нет.

G_2

$$-\alpha_0 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

(I) $\mathfrak{k}_1 = A_2$,

$\mathfrak{k}_2 = A_1 \oplus A_1$.

(II) Нет.

(8.4.1) *Приведенная выше классификация является полной классификацией максимальных подалгебр максимального ранга с точностью до действия группы* Aut $(\mathfrak{u})$.

Доказательство. В случае (I) это утверждение следует из того, что по теореме (2.6.2) изоморфизм между $\pi(\mathfrak{k}_i)$ и $\pi(\mathfrak{k}_j)$ продолжается до автоморфизма системы Δ. Что касается случая II, то заметим, что изоморфизмы $\pi \setminus \{\alpha_i\} \cong \pi \setminus \{\alpha_j\}$ для A_l, D_l и E_6 можно продолжить до автоморфизмов системы π, как видно из диаграмм Дынкина. Согласно (8.2.2), это означает, что соответствующие подалгебры сопряжены относительно Aut $(\mathfrak{u})$. □

8.5. Классификация вещественных простых алгебр Ли внутреннего типа

Напомним результаты § 4.5. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{u}$ — фиксированная вещественная компактная форма этой алгебры. Обозначим через $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathfrak{u})$ совокупность всех инволютивных автоморфизмов алгебры $\mathfrak{u}$. Для $\rho \in \mathcal{I}$ положим

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(\rho) = (\rho + 1)\,\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\rho) = (\rho - 1)\,\mathfrak{u},$$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{g}(\rho) = k + i\mathfrak{p} \quad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Ясно, что $\mathfrak{g}(\rho)$ есть вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ и всякая вещественная форма этой алгебры изоморфна одной из алгебр $\mathfrak{g}(\rho)$, $\rho \in \mathcal{I}$. Для $\rho, \rho' \in \mathcal{I}$ равенство $\mathfrak{g}(\rho) = \mathfrak{g}(\rho')$ имеет место в том и только том случае, когда существует автоморфизм $\sigma \in$ $\in$ Aut $(\mathfrak{u})$, такой что $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho'$. Поскольку Ad $(\mathfrak{u})$ — нормальная подгруппа в Aut $(\mathfrak{u})$, отсюда следует, что если $\rho, \rho' \in \mathcal{I}$, $\rho \in$ Ad $(\mathfrak{u})$ и $\mathfrak{g}(\rho) \cong \mathfrak{g}(\rho')$, то $\rho' \in$ Ad $(\mathfrak{u})$.

Определение. Вещественная форма $\mathfrak{g}(\rho)$ называется формой *внутреннего типа*, если $\rho \in$ Ad $(\mathfrak{u})$. В противном случае она называется формой *внешнего типа*.

(8.5.1) *Пусть* $\rho \in \mathcal{I}(\mathfrak{u})$, $\rho \neq 1$.

1) $\mathfrak{k}(\rho)$ *является максимальной подалгеброй в* $\mathfrak{u}$.

2) *Представление* $\psi = \psi_\rho$ *алгебры* $\mathfrak{k}(\rho)$, *заданное формулой*

$$\psi(X) = \operatorname{ad} X\,|_{\mathfrak{p}(\rho)} \quad \text{для } X \in \mathfrak{k}(\rho),$$

точно и неприводимо.

Доказательство. 1) Напомним, что

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Поэтому подалгебра $\mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] + [\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]]$ является идеалом в $\mathfrak{u}$ и, значит, совпадает с $\mathfrak{u}$. Другими словами, $\mathfrak{p}$ порождает $\mathfrak{u}$.

Пусть $\mathfrak{k}_1$ — произвольная подалгебра в $\mathfrak{u}$, содержащая $\mathfrak{k}$. Тогда

$$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}.$$

Пусть $\mathfrak{p}_2$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{p}_1$ в $\mathfrak{p}$ относительно формы Киллинга B. Тогда $B(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{p}_2) = 0$ и $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_2$. Из инвариантности формы Киллинга вытекает, что $B(\mathfrak{p}_1, [\mathfrak{k}_1, \mathfrak{p}_2]) = B([\mathfrak{k}_1, \mathfrak{p}_1], \mathfrak{p}_2) = 0$, ибо $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{k}_1$. Следовательно, $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{p}_2] \subset \mathfrak{p}_2$ и потому $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}_2 = 0$. Пусть $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ — подалгебры в $\mathfrak{u}$, порожденные $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ соответственно. Так как $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ порождает $\mathfrak{u}$ и $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] = 0$, то $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ — идеалы в $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{u}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{u}$ проста, один из этих идеалов сопадает с $\mathfrak{u}$. Если $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{u}$, то равенство $[\mathfrak{u}, \mathfrak{p}_2] = 0$ влечет $\mathfrak{p}_2 = 0$ и $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{u}$. Если $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{u}$, то аналогично $\mathfrak{p}_1 = 0$ и $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}$.

2) Поскольку $\mathfrak{p}$ порождает $\mathfrak{u}$, из равенства $[X, \mathfrak{p}] = 0$ следует, что $X = 0$. Значит, представление ψ точно. Пусть $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}$ — подпространство, инвариантное относительно $\psi(\mathfrak{k})$. Тогда $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}_1$ есть подалгебра и, в силу 1), $\mathfrak{p}_1 = 0$. □

(8.5.2) 1) *Для всякой подалгебры Картана* $\mathfrak{t}_+$ *алгебры* $\mathfrak{k}(\rho)$ *существует единственная подалгебра Картана* $\mathfrak{t}$ *алгебры* $\mathfrak{u}$, *содержащая* $\mathfrak{t}_+$, *такая что*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_+ \oplus \mathfrak{t}_-, \quad \mathfrak{t}_- \subset \mathfrak{p}(\rho), \quad \rho\mathfrak{t} = \mathfrak{t}.$$

2) *Всякая такая подалгебра* $\mathfrak{t}_+$ *содержит регулярный элемент алгебры* $\mathfrak{u}$.

3) *Если автоморфизм* ρ *внутренний, то* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_+$, *и обратно.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(\mathfrak{t}_+)$ обозначает централизатор алгебры $\mathfrak{t}_+$ в $\mathfrak{u}$: $\mathfrak{c} = \{X \in \mathfrak{u}: [X, \mathfrak{t}_+] = 0\}$. Если $X + Y \in \mathfrak{c}$, где $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$, то $[X, \mathfrak{t}_+] \subset \mathfrak{k}$, $[Y, \mathfrak{t}_+] \subset \mathfrak{p}$ и $(X + Y, \mathfrak{t}_+] = 0$. Следовательно, $[X, \mathfrak{t}_+] = 0$ и $X \in \mathfrak{t}_+$, ввиду того что $\mathfrak{t}_+$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{k}$. Кроме того, $[Y, \mathfrak{t}_+] = 0$, т. е. $Y \in \mathfrak{c}$. Полагая $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{t}$, имеем $\mathfrak{c} = \mathfrak{t}_+ \oplus \mathfrak{t}_-$. Отсюда видно, что $\rho\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Далее, так как $[\mathfrak{t}_-, \mathfrak{t}_-] \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{t}_+$, то $[\mathfrak{c}, [\mathfrak{c}, \mathfrak{c}]] = 0$ и алгебра $\mathfrak{c}$ нильпотентна. Поскольку всякая компактная разрешимая алгебра Ли абелева (упр. 1 § 4.3), алгебра $\mathfrak{c}$ абелева. Пусть $\mathfrak{c}_1$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{u}$, содержащая $\mathfrak{c}$. Тогда $[\mathfrak{c}_1, \mathfrak{t}_+] = 0$ и $\mathfrak{c}_1 \subset \mathfrak{c}$. Следовательно, $\mathfrak{c}$ является максимальной абелевой подалгеброй в $\mathfrak{u}$ и потому, очевидно, — единственной подалгеброй Картана в $\mathfrak{u}$, содержащей $\mathfrak{t}_+$. В дальнейшем мы будем писать $\mathfrak{t}$ вместо $\mathfrak{c}$.

2) Имеем

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{t} + \sum_{\alpha>0} (\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha),$$

$$[H,\ C_\alpha] = 2\pi(\alpha,\ H)S_\alpha,\quad [H,\ S_\alpha] = -2\pi(\alpha,\ H)C_\alpha \text{ для } H \in \mathfrak{t}.$$

Если $(\alpha, \mathfrak{t}_+) = 0$, то $\mathbb{R}C_\alpha + \mathbb{R}S_\alpha \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{t}_+) = \mathfrak{t}$, — противоречие. Следовательно, $(\alpha, \mathfrak{t}_+) \neq 0$ для всех $\alpha \in \Delta$. Поэтому найдется такой элемент $H_0 \in \mathfrak{t}_+$, что $(\alpha, H_0) \neq 0$ для всех $\alpha \in \Delta$. Ясно, что H_0 — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{u}$.

3) Поскольку отображение $\exp\colon \mathrm{ad}(\mathfrak{u}) \to \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ сюръективно (см. (6.9.5)), для всякого внутреннего автоморфизма ρ найдется такой элемент $X \in \mathfrak{u}$, что $\exp \mathrm{ad}\, X = \rho$. Пусть $\mathfrak{t}_1$ — подалгебра Картана содержащая X. Тогда $(\mathrm{ad}\, X)\, \mathfrak{t}_1 = 0$ и $(\rho - 1)\, \mathfrak{t}_1 = 0$. Следовательно, $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{k}(\rho)$ и $\mathfrak{k}(\rho)$ имеет максимальный ранг.

Обратно, если $(\rho - 1)\, \mathfrak{k} = 0$, то $\rho = \exp \mathrm{ad}\, H$ для некоторого $H \in \mathfrak{t}$, в силу упражнения к § 5.4. Поэтому если $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u}) \setminus \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ и $\rho\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, то $(\rho - 1)\, \mathfrak{t} \neq 0$. □

(8.5.3) *Классификацию отличных от $\mathfrak{u}$ вещественных форм внутреннего типа алгебры $\mathfrak{g}$ можно получить из классификации, приведенной в § 8.4, опуская в (I) все $\mathfrak{k}_i$, для которых $m_i \neq 2$ (см. табл. 1).*

Доказательство. Пусть $\rho \neq 1$ — инволютивный внутренний автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$. В силу (6.9.5), существуют $\sigma \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ и $H \in \mathfrak{t}$, такие что $\sigma\rho\sigma^{-1} = \exp \mathrm{ad}\, H$. Следовательно, мы можем предположить, что $\rho = \exp \mathrm{ad}\, H$. По теореме (8.5.1) подалгебра $\mathfrak{k}(\rho)$ максимальна. Но так как $\mathfrak{k}(\rho) \supset \mathfrak{t}$, то, согласно (8.3.6) и (8.3.7), либо существует автоморфизм $\sigma' \in \mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$, для которого

$$\sigma'\rho\sigma'^{-1} = \exp \mathrm{ad} \frac{H_i}{2}, \quad \text{где } m_i = 1,$$

либо

$$\rho = \exp \mathrm{ad} \frac{H_i}{m_i}, \quad \text{где } m_i \text{ — простое число.}$$

В последнем случае $m_i = 2$, поскольку $\rho^2 = 1$. Следовательно, автоморфизм ρ сопряжен с $\exp \mathrm{ad}\,(H_i/2)$ относительно $\mathrm{Ad}(\mathfrak{u})$ для некоторого $i = 1, \ldots, l$, такого что $m_i = 1$ или 2.

Положим

$$\rho_i = \exp\ \mathrm{ad} \frac{H_i}{2}, \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}(\rho_i) = \mathfrak{k}_i + \sqrt{-1}\, \mathfrak{p}_i$$

Таблица 1

Простые вещественные алгебры Ли внутреннего типа

$\mathfrak{g}$ (обозначения Картана)	$2H_i$	$\mathfrak{k}_i$
AIII (A_l, $l \geqslant 1$)	H_1	$\mathbb{R} \oplus A_{l-1}$
AIII	$H_i \left(2 \leqslant i \leqslant \left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)$	$\mathbb{R} \oplus A_{i-1} \oplus A_{l-1}$
BI (B_l, $l \geqslant 2$)	H_1	$\mathbb{R} \oplus B_{l-1}$
BI	H_2	$A_1 \oplus A_1 \oplus B_{l-2}$
BI	H_i $(3 \leqslant i \leqslant l-1)$	$D_i \oplus B_{l-i}$
BI	H_l	D_l
CI (C_l, $l \geqslant 3$)	H_l	$\mathbb{R} \oplus A_{l-1}$
CII	$H_i \left(1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{l-1}{2}\right]+1\right)$	$C_i \oplus C_{l-i}$
DI (D_l, $l \geqslant 4$)	H_2	$A_1 \oplus A_1 \oplus D_{l-2}$
DI	$H_i \left(3 \leqslant i \leqslant \left[\frac{l+1}{2}\right]\right)$	$D_i \oplus D_{l-i}$
DI	H_1	$\mathbb{R} \oplus D_{l-1}$
DII	H_l	$\mathbb{R} \oplus A_{l-1}$
EII (E_6)	H_1	$\mathbb{R} \oplus D_5$
EII	H_2	$A_1 \oplus A_5$
EV (E_7)	H_5	A_7
EVI	H_2	$A_1 \oplus D_6$
EVII	H_1	$\mathbb{R} \oplus E_6$
EVIII (E_8)	H_8	D_8
EIX	H_1	$A_1 \oplus E_7$
FI (F_4)	H_4	$A_1 \oplus C_3$
FII	H_1	B_4
G	H_1	$A_1 \oplus A_1$

для тех i, для которых $m_i = 1$ или 2. Так как любые два разложения Картана алгебры $\mathfrak{g}_i$ сопряжены относительно $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g}_i)$ (см. (4.5.4)), то $\mathfrak{g}_i \cong \mathfrak{g}_j$ влечет $\mathfrak{k}_i \cong \mathfrak{k}_j$.

Обратно, допустим, что $\mathfrak{k}_i \cong \mathfrak{k}_j$. Согласно (8.4.1), существует $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u})$, для которого $\theta\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k}_j$. Тогда

$$\theta\mathfrak{p}_i = \{\theta X\colon B(\mathfrak{k}_i, X) = 0\} = \{X\colon B(\theta\mathfrak{k}_i, X) = 0\} = \mathfrak{p}_j.$$

Продолжив θ до автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, получим $\theta\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_j$. $\square$

8.6. Вещественные формы внешнего типа

Пусть ρ — инволютивный внешний (= не внутренний) автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$ и

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k}(\rho) \oplus \mathfrak{p}(\rho),$$

$$\mathfrak{k}(\rho) = (1+\rho)\,\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{p}(\rho) = (1-\rho)\,\mathfrak{u}.$$

Пусть, далее, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_+ \oplus \mathfrak{t}_-$, где $\mathfrak{t}_+ \subset \mathfrak{k}(\rho)$ и $\mathfrak{t}_- \subset \mathfrak{p}(\rho)$, — подалгебра Картана в $\mathfrak{u}$. Согласно (8.5.2), 2) $\mathfrak{t}_+$ содержит некоторый регулярный элемент H алгебры $\mathfrak{u}$. Поскольку $(\beta, H) \neq 0$ для любого $\beta \in \Delta$, существует камера Вейля W, содержащая H. Так как $\rho H = H$, то $\rho W = W$. Для W можно подобрать систему простых корней $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, такую что

$$W = \{X \in \mathfrak{t}\colon (\alpha_1, X) > 0, \ldots, (\alpha_l, X) > 0\}$$

и $\rho\pi = \pi$.

Пусть $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $k(\rho)$ и $\mathfrak{c}$ — централизатор $\mathfrak{z}$: $\mathfrak{c} = \{X \in \mathfrak{u}\colon [X, \mathfrak{z}] = 0\}$. Тогда $k(\rho) \subset \mathfrak{c}$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{t}_+$, мы имеем $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{c}$. Так как $\mathfrak{k}(\rho)$ — максимальная подалгебра и $\mathfrak{t} \not\subset \mathfrak{k}(\rho)$, то $\mathfrak{z} = \mathfrak{u}$, ввиду (8.5.2), 3). Следовательно, $\mathfrak{z}$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{u}$ и, значит, $\mathfrak{z} = 0$. Это доказывает, что алгебра $\mathfrak{k}(\rho)$ полупроста. Итак, мы получили следующее утверждение:

(8.6.1) *Для всякого инволютивного внешнего автоморфизма* ρ *алгебры* $\mathfrak{u}$

1) *можно найти такую подалгебру Картана* $\mathfrak{t}$ *в* $\mathfrak{u}$, *что* $\rho\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, *и такую систему простых корней* $\pi \subset \mathfrak{t}$, *что* $\rho\pi = \pi$;

2) *алгебра* $\mathfrak{k}(\rho)$ *полупроста.*

Введем обозначение

$$\alpha^* = \rho\alpha \text{ для } \alpha \in \Delta.$$

Продолжив ρ до автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, положим

$$\rho E_\beta = q(\beta)\, E_{\beta^*} \quad (q(\beta) \in \mathbb{C}) \text{ для } \beta \in \Delta.$$

Тогда

$$q(\beta)\, q(-\beta) = 1,$$

$$q(\alpha+\beta) = \varepsilon(\alpha, \beta)\, q(\alpha)\, q(\beta) \text{ для } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta,$$

где $\varepsilon(\alpha, \beta) = N_{\alpha,\beta}/N_{\alpha^*,\beta^*} = \pm 1$. Далее, $\rho\mathfrak{u} = \mathfrak{u}$, так что

$$\overline{q(\beta)} = q(\beta)^{-1}, \text{ или } |q(\beta)| = 1.$$

Инволютивность автоморфизма ρ дает

$$q(\beta)\, q(\beta^*) = 1,$$

откуда следует, что

$$q(\beta^*) = \overline{q(\beta)} = q(-\beta) = q(\beta)^{-1} \text{ для } \beta \in \Delta.$$

В частности, если $\beta = \beta^*$, то $q(\beta) = q(\beta^*) = \pm 1$.

(8.6.2) *Для всякого инволютивного внешнего автоморфизма* ρ *алгебры* $\mathfrak{u}$ *можно найти такой элемент* $X \in \mathfrak{t}$, *что если положить*

$$\rho_1 = (\exp \operatorname{ad} X)\rho(\exp \operatorname{ad}(-X)), \quad \rho_1(E_\beta) = q_1(\beta) E_{\beta^*} \ (\beta \in \Delta),$$

то $q_1(\beta) = q_1(\beta^*) = \pm 1$ *при всех* $\beta \in \Delta$. (*Заметим, что* $(\rho_1 - \rho)\,\mathfrak{t} = 0$.)

Доказательство. Предположим, что $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_r\gamma_r^*\}$, где $\alpha_j = \alpha_j^*$ для $j = 1, \ldots, p$ и $p + 2r = l$. Поскольку множество $\{\gamma_1 - \gamma_1^*, \ldots, \gamma_r - \gamma_r^*\}$ линейно-независимо и $|q(\gamma_i)| = 1$, мы можем решить уравнение

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\gamma_i - \gamma_i^*, X) = q(\gamma_i), \quad i = 1, \ldots, r,$$

и найти удовлетворяющий ему элемент $X \in \mathfrak{t}$. Переходя к комплексно-сопряженным числам в обеих частях уравнения, получим

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\gamma_i^* - \gamma_i, X) = q(\gamma_i^*), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Следовательно, для $\rho_1 = \exp \operatorname{ad} X \cdot \rho \cdot \exp(-\operatorname{ad} X)$ имеем

$$\rho_1 E_{\alpha_j} = q(\alpha_j) E_{\alpha_j}, \quad q(\alpha_j) = \pm 1,$$

$$\rho_1 E_{\gamma_i} = \exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\gamma_i^*, X)\cdot q(\gamma_i) \cdot \exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\gamma_i, -X)\, E_{\gamma_i^*} = E_{\gamma_i^*},$$

$$\rho_1 E_{\gamma_i^*} = E_{\gamma_i}.$$

Для доказательства того, что $q_1(\beta) = \pm 1$ при всех $\beta \in \Delta$, достаточно рассмотреть лишь положительные β. Применим индукцию по упорядочению в Δ. Для простых β, как мы видели, $q_1(\beta) = \pm 1$. Если β не является простым, то найдутся положительные корни γ и δ, такие что $\gamma + \delta = \beta$. Так как $\gamma < \beta$ и $\delta < \beta$, то по предположению индукции, $q_1(\gamma) = \pm 1$, $q_1(\delta) = \pm 1$ и, следовательно, $q_1(\beta) = \varepsilon(\gamma, \delta)\, q_1(\gamma)\, q_1(\delta) = \pm 1$. □

(8.6.3) *Для всякого инволютивного внешнего автоморфизма* ρ *алгебры* $\mathfrak{u}$, *для которого* $q(\beta) = \pm 1$ *при всех* $\beta \in \Delta$, *существуют такой автоморфизм* $\rho_0 \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{u})$ *с* $\rho_0^2 = 1$ *и такой элемент* $H_0 \in \mathfrak{t}_+$, *что*

$$\rho = \rho_0 \exp \operatorname{ad} H_0,$$

$$\rho\rho_0 = \rho_0\rho, \quad (\exp \operatorname{ad} H_0)^2 = 1$$

и

$$q_0(\alpha) = 1 \text{ при } \alpha \in \pi,$$

где q_ρ определяется соотношением

$$\rho_0 E_\beta = q_0(\beta) E_{\beta^*} \text{ для } \beta \in \Delta.$$

Доказательство. В (5.4.3) был построен взаимно-однозначный гомоморфизм μ: $\mathrm{Aut}(\pi) \to N_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{t})$. Положим $\rho_0 = \mu(f(\rho))$ и $\rho_0 E_\beta = q_0(\beta) E_{\beta^*}$ для $\beta \in \Delta$. По определению гомоморфизма μ, $(\rho - \rho_0)\mathfrak{t} = 0$, $q_0(\alpha) = 1$ для $\alpha \in \pi$ и $q_0(\beta) = \pm 1$ для $\beta \in \Delta$. Поскольку f и μ — гомоморфизмы, $\rho_0^2 = 1$. Далее, для $\beta \in \Delta$

$$\rho\rho_0 E_\beta = q(\beta^*) q_0(\beta) E_\beta,$$

$$\rho_0\rho E_\beta = q(\beta) q_0(\beta^*) E_\beta$$

и $q(\beta) = q(\beta^*)$, $q_0(\beta) = q_0(\beta^*)$. Следовательно, $(\rho\rho_0 - \rho_0\rho) E_\beta = 0$ и, значит, $\rho\rho_0 = \rho_0\rho$. Так как $\mathfrak{k}(\rho)$ — собственное подпространство для ρ, то $\rho_0\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$.

Таким образом, $\rho_0\rho$ — автоморфизм компактной полупростой алгебры $\mathfrak{k}(\rho)$, $\mathfrak{t}_+$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{k}(\rho)$ и $(\rho_0\rho - 1)\mathfrak{t}_+ = 0$. Поэтому можно найти такой элемент $H_0 \in \mathfrak{t}_+$, что $\rho_0\rho = \exp \operatorname{ad} H_0$ на $\mathfrak{k}(\rho)$ (см. упражнение к § 5.4). Очевидно, $(\exp \operatorname{ad} H_0)^2 = 1$. Поскольку $\rho_0\rho \exp \operatorname{ad} H_0$ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$ и

$$\mathfrak{k}(\rho_0\rho \exp \operatorname{ad} H_0) \supset \mathfrak{k}(\rho) \cup \mathfrak{t} \supsetneqq \mathfrak{k}(\rho),$$

мы имеем $\mathfrak{k}(\rho_0\rho \exp \operatorname{ad} H_0) = \mathfrak{u}$ и $\rho_0\rho \exp \operatorname{ad} H = 1$, т. е. $\rho = \rho_0 \exp \operatorname{ad} H_0$. □

В дальнейшем мы сохраняем обозначения ρ, ρ_0 и H_0 из (8.6.3).

Разобьем корневую систему Δ на три непересекающихся подмножества

$$\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta\colon \alpha^* = \alpha,\ q(\alpha) = 1\},$$

$$\Delta_2 = \{\beta \in \Delta\colon \beta^* = \beta,\ q(\beta) = -1\},$$

$$\Delta_3 = \{\gamma \in \Delta\colon \gamma^* \neq \gamma\}.$$

Вводя обозначения $\mathfrak{t}_+^c = h_+$ и $t_-^c = \mathfrak{h}_-$, получаем

$$\mathfrak{k}^c = \mathfrak{h}_+ + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathbb{C}E_\alpha + \sum_{\gamma \in \Delta_3} \mathbb{C}(1+\rho)E_\gamma,$$

$$\mathfrak{p}^c = \mathfrak{h}_- + \sum_{\beta \in \Delta_2} \mathbb{C}E_\beta + \sum_{\gamma \in \Delta_3} \mathbb{C}(1-\rho)E_\gamma$$

(с учетом того, что $(1+\rho)E_{\gamma^*} = q(\gamma)(1+\rho)E_\gamma$ и $(1-\rho)E_{\gamma^*} = -q(\gamma)(1-\rho)E_\gamma$).

Изучим корневую систему $\Delta(\mathfrak{k})$ комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{k}^c$ относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}_+$. Для произвольного корня $\delta \in \Delta$ обозначим через δ' его ограничение на $\mathfrak{h}_+$.

Пусть γ принадлежит Δ_3. Для $H \in \mathfrak{h}_+$

$$[H, \rho E_\gamma] = [\rho H, \rho E_\gamma] = \rho [H, E_\gamma] = \gamma(H)\rho E_\gamma$$

и $\gamma(H) = \gamma^*(H)$. Аналогично для $H \in \mathfrak{h}_-$ имеем $\gamma(H) = -\gamma^*(H)$. Следовательно,

$$\mathfrak{h}_+ = \{H \in \mathfrak{h}:\ \gamma(H) = \gamma^*(H)\}.$$

Для $H \in \mathfrak{h}_+$

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha \quad (\alpha \in \Delta_1),$$

$$[H, (1+\rho) E_\gamma] = \gamma(H) E_\gamma \, (\gamma \in \Delta_3),$$

и потому

$$\Delta(k) = \{\delta':\ \delta \in \Delta_1 \cup \Delta_3\}.$$

Будем рассматривать Δ как подмножество в $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$. Так как $\rho\alpha = \alpha$ для $\alpha \in \Delta_1$ и $\rho(\gamma + \gamma^*) = \gamma + \gamma^*$ для $\gamma \in \Delta_3$, то α, $\gamma + \gamma^* \in \mathfrak{t}_+ \subset \mathfrak{h}_+$. Согласно (8.3.4), мы можем в качестве скалярного произведения в $\mathfrak{h}_+$ взять ограничение скалярного произведения в $\mathfrak{h}$.

Поскольку $\alpha'(H) = \alpha(H)$ и $\gamma'(H) = \frac{\gamma + \gamma^*}{2}(H)$ при $H \in \mathfrak{h}_+$, мы имеем

$$\alpha' = \alpha \text{ для } \alpha \in \Delta_1 \text{ и } \gamma' = \frac{\gamma + \gamma^*}{2} \text{ для } \gamma \in \Delta_3.$$

В качестве упорядочения в $\Delta(\mathfrak{k})$ будем использовать упорядочение в $\mathfrak{t}$. Так как $\rho\pi = \pi$, то из $\delta > 0$ следует $\delta^* > 0$.

(8.6.4) *Пусть* $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\ \gamma_1, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_r, \gamma_r^*\}$, *где* $\alpha_i \in \Delta_1$, $\beta_j \in \Delta_2$, $\gamma_k \in \Delta_3$ *и* $p + q + 2r = l$.

1) *Множество* $\{\alpha_1', \ldots, \alpha_p';\ \beta_1', \ldots, \beta_q';\ \gamma_1', \ldots, \gamma_r'\}$ *линейно-независимо в* $\mathfrak{h}_+$ *и*

$$\operatorname{rank} \mathfrak{k} = p + q + r.$$

2) $\{\alpha_1', \ldots, \alpha_p';\ \gamma_1', \ldots, \gamma_r'\} \subset \pi(\mathfrak{k})$.

3) *Если* $\rho = \rho_0$, *то* $\pi(\mathfrak{k}) = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_p';\ \gamma_1', \ldots, \gamma_r'\}$.

Доказательство. 1) Это утверждение следует из того, что $\mathfrak{h}_+ = \{H \in \mathfrak{h}:\ \gamma_k(H) = \gamma_k^*(H)$ при $k = 1, \ldots, r\}$.

2) Имеем $\alpha_i' = \alpha_i > 0$ и $\gamma_k' = (\gamma_k + \gamma_k^*)/2 > 0$.

Пусть δ — один из корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Предположим, что корень δ' не является простым. Так как $\Delta(\mathfrak{k}) = \{\lambda':\ \lambda \in \Delta_1 \cup \Delta_3\}$, то найдутся положительные корни λ, $\mu \in \Delta_1 \cup \Delta_3$, для которых $\delta' = \lambda' + \mu'$. Следовательно, $(1 + \rho) E_\delta = c[(1 +$

$+ \rho) E_\lambda, \ (1 + \rho) E_\mu]$, где c — некоторое комплексное число. Значит, корень δ должен совпадать с одним из корней $\lambda + \mu$, $\lambda + \mu^*$, $\lambda^* + \mu$, $\lambda^* + \mu^*$. Но поскольку корни λ, μ, λ^*, μ^* положительны, это невозможно.

3) Это следует из 1) и 2). □

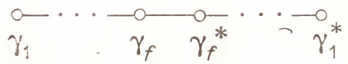
Классификация для случая $\rho = \rho_0$

$\mathrm{Aut}(\pi) \neq 1$ только для A_l $(l \geqslant 2)$, D_l $(l \geqslant 4)$ и E_6.

Для алгебры D_4 группа $\mathrm{Aut}(\pi)$ изоморфна симметрической группе $\mathfrak{S}(3)$ на множестве $\{1, 2, 3\}$. Но все элементы порядка 2 в $\mathfrak{S}(3)$ $((2, 3), (3, 1)$ и $(1, 2))$ попарно сопряжены.

Во всех остальных случаях $\mathrm{Aut}(\pi)$ имеет порядок 2.

A_{2f}



Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{2f+1}$ в $\mathbb{R}^{2f+1}$ и положим

$$\gamma_1 = e_1 - e_2, \ \gamma_2 = e_2 - e_3, \ \ldots, \ \gamma_f = e_f - e_{f+1},$$

$$\gamma_f^* = e_{f+1} - e_{f+2}, \ \ldots, \ \gamma_1^* = e_{2f} - e_{2f+1},$$

$$\gamma_k' = \frac{\gamma_k + \gamma_k^*}{2}, \quad k = 1, \ldots, f.$$

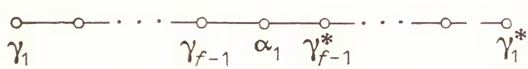
Диаграмма Дынкина для $\mathfrak{k}(\rho_0) = \mathfrak{k}_0$ имеет следующий вид:

$\pi(\mathfrak{k}_0) =$

(B_f)

Аналогично

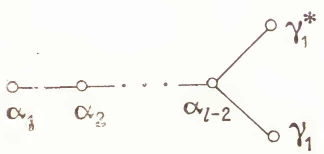
A_{2f-1}



$\pi(\mathfrak{k}_0) =$

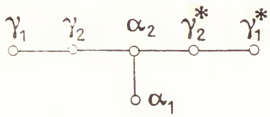
(C_f)

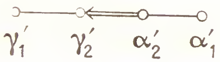
D_l



$\pi(\mathfrak{k}_0) =$ 

(B_{l-1})

E_6 

$\pi(\mathfrak{k}_0) =$ 

(F_4)

Классификация для случая $\rho \neq \rho_0$

Положим $\mathfrak{k}(\rho_0) = \mathfrak{k}_0$ и $\rho_1 = \exp \operatorname{ad} H_0 \neq 1$. Пусть $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_p; \gamma'_1, \ldots, \gamma'_r\} = \pi(\mathfrak{k})$ и $\{H'_1, \ldots, H'_p, \ldots, H'_{p+r}\}$ — базис в $\mathfrak{t}_+$, двойственный к $\pi(\mathfrak{k}_0)$. Пусть $m'_1\alpha'_1 + \ldots + m'_{p+r}\gamma'_r$ — старший корень в $\Delta(\mathfrak{k}_0)$. Так как $\mathfrak{k}_0$ — компактная простая алгебра Ли, что видно из приведенной выше классификации для случая $\rho = \rho_0$, и ρ_1 индуцирует инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{k}_0$, то, в силу (8.5.3), найдется $j \in \{1, \ldots, p + r\}$, для которого $m'_j = 1$ или 2 и $\sigma\rho_1\sigma^{-1} = \exp \operatorname{ad}(H'_j/2)$, где $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{k}_0)$. Поскольку алгебра $\mathfrak{k}_0$ изоморфна B_l, C_l или F_4, то $\operatorname{Aut}(\mathfrak{k}_0) = \operatorname{Ad}(\mathfrak{k}_0)$ и σ можно рассматривать как элемент группы $\operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$. Так как

$$\sigma\rho\sigma^{-1} = \sigma\rho_0\sigma^{-1} \cdot \exp \operatorname{ad} \frac{H'_j}{2},$$

где $\mathfrak{k}(\sigma\rho_0\sigma^{-1}) = \mathfrak{k}(\rho_0)$, $\sigma\rho_0\sigma^{-1}(\sigma\pi(\mathfrak{k}_0)) = \sigma\pi(\mathfrak{k}_0)$ и $\sigma\rho_0\sigma^{-1}(\sigma E_\alpha) = \sigma E_\alpha$ при $\alpha \in \pi(\mathfrak{k}_0)$, то мы можем, изменив обозначения, считать, что

$$\rho = \rho_0 \exp \operatorname{ad} \frac{H'_j}{2}.$$

Докажем, что если $j > p$, то ρ и ρ_0 сопряжены относительно $\operatorname{Ad}(\mathfrak{u})$. Для этого выберем элемент $Y \in \mathfrak{t}$, такой что

$$(\alpha_i, Y) = 0, \ i = 1, \ldots, p,$$

$$(\gamma_k, Y) = \delta_{kj}, \ (\gamma_k^*, Y) = 0, \ k = 1, \ldots, r.$$

Прямое вычисление дает

$$(1 + \rho) Y = H'_j,$$

и теперь непосредственно проверяется, что

$$\exp \operatorname{ad} \frac{Y}{2} \left(\rho_0 \exp \operatorname{ad} \frac{H'_j}{2}\right) \exp \operatorname{ad} \frac{-Y}{2} = \rho_0.$$

Таким образом, мы снова приходим к случаю $\rho = \rho_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что $j \leqslant p$. Без потери общности можно считать, что $j = 1$. Тогда

$$\rho E_{\alpha_1} = \exp 2\pi i \frac{(\alpha_1, H_1')}{2} E_{\alpha_1} = -E_{\alpha_1}.$$

Будем писать β вместо α_1, так что

$$\pi = \{\alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta, \gamma_1, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_r, \gamma_r^*\}, \ \beta \in \Delta_2.$$

В силу (8.6.4),

$$\pi(\mathfrak{k}) = \{\eta', \alpha_2', \ldots, \alpha_p', \gamma_1', \ldots, \gamma_r'\},$$

где η' — простой корень из $\Delta(\mathfrak{k})$, а η — положительный корень из $\Delta_1 \cup \Delta_3$. Нам понадобится следующее утверждение:

(8.6.5) *Пусть* $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *— система простых корней в* Δ, $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$ *— различные корни из* π, $\beta = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_m} \in \Delta$ *и* $\alpha_j \in \pi \setminus \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}\}$. *Тогда* $\beta + \alpha_j \in \Delta$ *в том и только том случае, если* $(\alpha_j, \alpha_{i_h}) \neq 0$ *при некотором* h.

Доказательство. Поскольку $\beta - \alpha_j \notin \Delta$, включение $\beta + \alpha_j \in \Delta$ эквивалентно неравенству $-2(\beta, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) > 0$. Так как $(\alpha_j, \alpha_k) \leqslant 0$ для $k \neq j$, то $(\beta, \alpha_j) = \sum_{h=1}^{m} (\alpha_{i_h}, \alpha_j) < 0$ тогда и только тогда, когда $(\alpha_j, \alpha_{i_h}) \neq 0$ при каком-то h. ▯

Мы можем найти последовательность простых корней

(*) $\quad \beta, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_t}, \gamma_k,$

такую что $(\beta, \alpha_{i_1}) \neq 0$, $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) \neq 0, \ldots, (\alpha_{i_t}, \gamma_k) \neq 0$. (Сначала соединяем β с γ_1 какой-нибудь последовательностью, а затем первый корень γ в этой последовательности берем в качестве γ_k.) По только что доказанной лемме

$$\beta + \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_t} + \gamma_k = \mu \in \Delta.$$

Поскольку $\rho\mu = \rho\beta + \rho\alpha_{i_1} + \cdots + \rho\alpha_{i_t} + \gamma_k^* = \beta + \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_t} + \gamma_k^* \neq \mu$, мы имеем $\mu \in \Delta_3$ и $\mu' \in \Delta(\mathfrak{k})$. Если корень μ' не является простым в $\Delta(\mathfrak{k})$, то $\mu' = \gamma' + \delta'$, где γ, δ — положительные корни в $\Delta_1 \cup \Delta_3$. Аналогично тому, как доказывалось утверждение (8.6.4), 2), можно доказать, что $\mu = \gamma + \delta$, где в случае необходимости γ, δ заменяются на γ^*, δ^*. Следовательно, γ и δ являются суммами простых корней из (*). Допустим, что γ_k входит в число слагаемых, дающих в сумме γ. Если β не входит в число этих слагаемых, то δ есть сумма β и некоторых корней α_i, так что $\delta \in \Delta_2$, поскольку

$$\rho\left[E_\beta, \left[E_{\alpha_i}, \left[E_{\alpha_i'}, \ldots\right]\right]\right] = -\left[E_\beta, \left[E_{\alpha_i}, \left[E_{\alpha_i'}, \ldots\right]\right]\right].$$

Это противоречит тому, что $\delta \in \Delta_1 \cup \Delta_3$. Следовательно,

$$\gamma = \beta + \ldots + \gamma_k.$$

Поскольку $\mu \neq \gamma$, написанная сумма должна разбиваться на две взаимно ортогональные части. Но это противоречит лемме (8.6.5).

Таким образом, справедлива следующая теорема:

(8.6.6) *Теорема.* *Предположим, что* $\mathfrak{u}$ *имеет инволютивный внешний автоморфизм (и, значит, является алгеброй типа* A_l $(l \geqslant 2)$, D_l $(l \geqslant 4)$ *или* E_6*). Пусть* $T \neq 1$ *принадлежит* $\operatorname{Aut}(\pi)$. *(В случае* D_4 *берем произвольный автоморфизм* $T \neq 1$, *для которого* $T^2 = 1$.) *Запишем* π *в виде*

$$\pi_T = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_r, \gamma_r^*\},$$

где $T\alpha_i = \alpha_i$ *и* $T\gamma_k = \gamma_k^* \neq \gamma_k$. *Положим* $\mu(T) = \rho_0$. *Тогда* $\mathfrak{k}(\rho_0) = \mathfrak{k}_0$ *есть простая алгебра Ли, для которой* $t_+ = \{X \in \mathfrak{t}\colon TX = X\}$ *служит подалгеброй Картана, и* $\pi(\mathfrak{k}_0) = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_p', \gamma_1', \ldots, \gamma_r'\}$. *Пусть*

$$\nu = m_1'\alpha_1' + \ldots + m_p'\alpha_p' + m_{p+1}'\gamma_1' + \ldots + m_{p+r}'\gamma_r'$$

— старший корень для $\pi(\mathfrak{k}_0)$.

Всякий инволютивный внешний автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$ *сопряжен с* ρ_0 *или* $\rho_i = \rho_0 \exp \operatorname{ad}(H_i/2)$, *где* $H_i \in \mathfrak{t}$ *определяется условиями*

$$(\alpha_j, H_i) = \delta_{ji}, \quad (\gamma_k, H_i) = (\gamma_k^*, H_i) = 0$$

для всех i, *таких что* $1 \leqslant i \leqslant p$ *и* $m_i' = 1$ *или* 2.

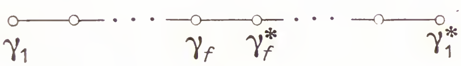
Подалгебра $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k}(\rho_i)$ *содержит* $\mathfrak{t}_+$ *в качестве подалгебры Картана, и*

$$\pi(\mathfrak{k}_i) = \{\eta', \alpha_1', \ldots, \hat{\alpha}_i', \ldots, \alpha_p', \gamma_1', \ldots, \gamma_r'\},$$

где $\eta = \alpha_i + \alpha_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_t} + \gamma_k$, *причем* $(\alpha_i, \alpha_{j_1}) \neq 0, \ldots, (\alpha_{j_t}, \gamma_k) \neq 0$.

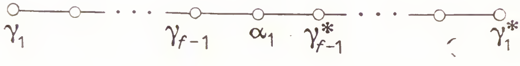
Приведем список этих подалгебр:

A_{2f} $\quad \pi_T =$



Поскольку здесь не фигурирует ни один из корней типа α, единственная простая вещественная алгебра Ли внешнего типа возникает при $\rho = \rho_0$.

A_{2f-1} $\quad \pi_T =$

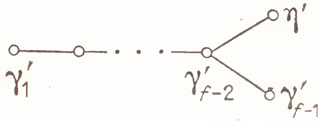


$\pi(\mathfrak{k}_0) =$ 

(C_f)

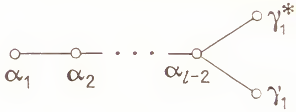
$$\nu = 2\gamma'_1 + \ldots + 2\gamma'_{f-1} + \alpha'_1.$$

Отсюда следует, что $\eta' = \alpha'_1 + \gamma'_{f-1}$ и

$\pi(\mathfrak{k}_1) =$ 

(D_f)

D_l

$\pi_T =$ 

$\pi(\mathfrak{k}_0) =$ 

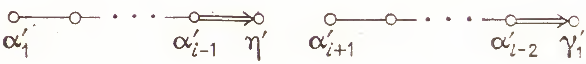
(B_{l-1})

$$\nu = \alpha'_1 + 2\alpha'_2 + \ldots + 2\alpha'_{l-2} + 2\gamma'_1.$$

Отсюда следует, что

$$\eta = \alpha'_i + \alpha'_{i+1} + \ldots + \alpha'_{l-2} + \gamma'_1$$

и потому

$\pi(\mathfrak{k}_i) =$ 

Следовательно, $\mathfrak{k}_i$ — алгебра типа

$$A_1 \oplus B_{l-2}$$

или

$$B_i \oplus B_{l-i-1}.$$

Покажем, что соответствующие алгебры Ли $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{g}_{l-i-1}$ изоморфны. Для этого достаточно доказать, что соответствующие внешние автоморфизмы θ_i и θ_{l-i-1} алгебры $\mathfrak{u}$ сопряжены. Так как $\pi(\mathfrak{k}_0)$ типа B_{l-1}, то

$$\eta' = \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_{l-2} + \gamma'_1$$

— корень алгебры $\mathfrak{k}_0$ и мы имеем диаграмму

Существует элемент S группы Вейля системы B_{l-1}, для которого

$$S\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{l-2}, \gamma'_1\} = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{l-2}, -\eta'\},$$

поскольку оба множества — фундаментальные системы. Тогда

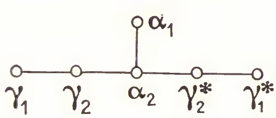
$$S\alpha'_i = \alpha'_i \text{ и } S\gamma'_1 = -\eta'.$$

Так как $\mathfrak{k}_0$ типа B_{l-1}, то $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{k}_0) = \mathrm{Ad}\,(\mathfrak{k}_0)$. Пусть σ — элемент группы $\mathrm{Ad}\,(\mathfrak{k}_0)$, порождающий S. Мы можем рассматривать σ как элемент из $\mathrm{Ad}\,(\mathfrak{u})$. Легко проверить, что сопряжение, определяемое элементом

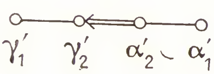
$$\left(\exp \pi \sqrt{-1}\, \mathrm{ad}\, H_l\right) \sigma^{-1},$$

переводит θ_i в θ_{l-i-1}.

E_6 $\pi_T =$



$\pi(\mathfrak{k}_0) =$



(F_4)

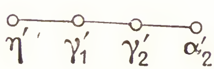
$$\nu = 2\alpha'_1 + 3\alpha'_2 + 4\gamma'_2 + 2\gamma'_1.$$

В этом случае η' можно выбрать единственным способом, а именно

$$\eta' = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \gamma'_2.$$

Тогда

$\pi(\mathfrak{k}_l) =$



(C_4)

Полученные результаты собраны в табл. 2.

Таблица 2

Простые вещественные алгебры Ли внешнего типа

$\mathfrak{g}$ (обозначения Картана)	$\rho = \rho_0 \exp \operatorname{ad} (H_1/2)$	$\mathfrak{k}_i$
AI (A_{2f})	ρ_0	B_f
AII (A_{2f-1})	ρ_0	C_f
AI (A_{2f-1})	$\rho_0 \exp \operatorname{ad} (H_1/2)$	D_f
DI (D_l)	ρ_0	B_{l-1}
DI	$\rho_0 \exp \operatorname{ad} (H_i/2)$ $(1 \leqslant i \leqslant [l/2])$	$B_i \times B_{l-i-1}$
EI	ρ_0	F_4
EIV	$\rho_0 \exp \operatorname{ad} (H_1/2)$	C_4

8.7. Автоморфизм системы π, заданный сопряжением

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ и $\mathfrak{h}_0$ — ее подалгебра Картана. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексификация алгебры $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{h}$ — комплексная линейная оболочка алгебры $\mathfrak{h}_0$ в $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g} \ni X \longmapsto \overline{X}$ обозначает сопряжение в $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{g}_0$. Тогда

$$\overline{[X, Y]} = [\overline{X}, \overline{Y}] \text{ и } \overline{cX} = \overline{c}\overline{X}$$

для $X, Y \in \mathfrak{g}$ и $c \in \mathbb{C}$. Рассмотрим пространство $\mathfrak{h}^*$, двойственное к $\mathfrak{h}$. Сопряжение алгебры $\mathfrak{g}$ порождает отображение пространства $\mathfrak{h}^*$ в себя, обозначаемое $\lambda \longmapsto \overline{\lambda}$:

$$\overline{\lambda}(H) = \overline{\lambda(\overline{H})} \text{ при } H \in \mathfrak{h}.$$

Отображение $\lambda \longmapsto \overline{\lambda}$ полулинейно, и так как из равенства $[H, E_\beta] = \beta(H) E_\beta$ следует, что $[\overline{H}, \overline{E}_\beta] = \overline{\beta(H)}\, \overline{E}_\beta$, т. е. $[H, \overline{E}_\beta] = \overline{\beta(\overline{H})}\, \overline{E}_\beta$, то $\overline{\Delta} = \{\overline{\beta}\colon \beta \in \Delta\} = \Delta$.

Пусть

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}(\rho) + i\mathfrak{p}(\rho)$$

— разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Тогда $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}(\rho) + \mathfrak{p}(\rho)$ есть компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ и ρ — инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{u}$, удовлетворяющий условию $\rho\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$, где $\mathfrak{t} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{u}$. Пусть Δ — корневая система алгебры $\mathfrak{g}$ относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ и $T = f_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{t})$ — автоморфизм системы Δ, порожденный ρ.

(8.7.1) *Для* $\beta \in \Delta$

$$\bar{\beta} = -T\beta.$$

Доказательство. Пусть $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — какой-нибудь базис в $\mathfrak{g}_0$. Он будет и базисом для $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$. Пусть Y принадлежит $\mathfrak{g}$. Если $(\operatorname{ad} Y) X_i = \sum_j a_{ji} X_j$ $(a_{ji} \in \mathbb{C})$, то $(\operatorname{ad} \overline{Y}) X_i = \overline{[Y, X_i]} = \sum_j \overline{a_{ji}} X_j$, так что матрица, соответствующая $\operatorname{ad} \overline{Y}$, является комплексно-сопряженной к матрице эндоморфизма $\operatorname{ad} Y$. Отсюда следует, в частности, что $B(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{B(X, Y)}$. Пусть λ принадлежит $\mathfrak{h}^*$. Так как $\lambda(H) = B(H_\lambda, H)$ для $H \in \mathfrak{h}_0$, то $\bar{\lambda}(H) = B(\overline{H}_\lambda, H) = B(H_{\bar{\lambda}}, H)$. Поскольку $\mathfrak{h}_0$ порождает $\mathfrak{h}$, имеем $\overline{H}_\lambda = H_{\bar{\lambda}}$.

Пусть $\beta \in \Delta$. Тогда $H_\beta \in i\mathfrak{t}$ и, значит, $H_\beta = i(X + Y)$, $X \in \mathfrak{k}(\rho)$, $Y \in \mathfrak{p}(\rho)$. Так как $\overline{X} = X$ и $\overline{Y} = -Y$, то $H_{\bar{\beta}} = \overline{H}_\beta = -i(X - Y) = -\rho H_\beta$. Следовательно, $H_{T\beta} = \rho H_\beta = -H_{\bar{\beta}}$ (ввиду (5.3.2)) и $T\beta = -\bar{\beta}$. □

Пусть $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система в Δ. Тогда фундаментальной системой будет и $\bar{\pi} = \{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_l\} = -T\pi$. Согласно результатам §§ 5.2 и 5.3, существует единственный элемент S группы Вейля $\operatorname{Ad}(\Delta)$, для которого $S\bar{\pi} = \pi$. Таким образом, мы имеем автоморфизм $[T]$: $\alpha_j \longmapsto S\bar{\alpha}_j$ системы π. В § 7.10 мы изучали $[T]$ в общем случае, когда алгебра $\mathfrak{g}$ не является простой. В этом параграфе мы определим все возможные $[T]$ для случая, когда $\mathfrak{g}$ проста.

Итак, пусть алгебра $\mathfrak{g}$ проста. Если $\mathfrak{g}_0$ — алгебра внутреннего типа, то $\rho = \exp \operatorname{ad} H$ для некоторого $H \in \mathfrak{t}$ и $T = 1$. Если $\mathfrak{g}_0$ — внешнего типа, то, согласно (8.6.1), мы можем предположить, что $T \in \operatorname{Aut}(\pi)$. Тогда $\bar{\pi} = -T\pi = -\pi$. Если $\operatorname{Ad}(\Delta)$ содержит -1, то определенный выше автоморфизм S должен быть равен -1 и в этом случае $S\bar{\alpha}_j = -ST\alpha_j = T\alpha_j$. Таким образом, $[T] = T$.

(8.7.2) *Пусть* Δ *— неразложимая корневая система. Группа Вейля* $\operatorname{Ad}(\Delta)$ *не содержит* -1 *тогда и только тогда, когда* Δ *имеет тип* A_l $(l \geqslant 2)$, D_l *(*l *нечетно) или* E_6.

Доказательство. (a) Поскольку система $-\pi = \{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_l\}$ фундаментальна в Δ вместе с π, существует автоморфизм $S \in$

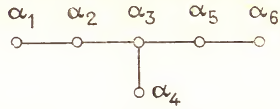


Рис. 8.

$\in \mathrm{Ad}(\Delta)$, для которого $-S \in \mathrm{Aut}(\pi)$. Следовательно, если $\mathrm{Aut}(\pi) = 1$, то $S = -1 \in \mathrm{Ad}(\Delta)$. Но это именно тот случай, когда Δ не принадлежит к типу A_l ($l \geqslant 2$), D_l ($l \geqslant 4$) или E_6.

(b) Группа Вейля системы A_l ($l \geqslant 2$) — это симметрическая группа на множестве из $l+1 \geqslant 3$ элементов, и потому ее центр тривиален. Следовательно, -1 не принадлежит к $\mathrm{Ad}(\Delta)$.

(c) Пусть $\{e_1, \ldots, e_l\}$ — какой-нибудь базис в $\mathbb{R}^l$. Группа Вейля системы D_l порождается всеми перестановками множества $\{e_1, \ldots, e_l\}$ и преобразованиями, которые умножают на -1 четное число векторов e_i (см. § 5.9). Следовательно, -1 принадлежит $\mathrm{Ad}(\Delta)$ тогда и только тогда, когда l четно.

(d) Автоморфизм -1 не принадлежит группе Вейля системы E_6 (см. упражнение). $\square$

Теперь мы можем дать полное решение нашей задачи.

(8.7.3) 1) *Если $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра внутреннего типа, т. е. $T = 1$, то $[T] \neq 1$ для A_l ($l \geqslant 2$), D_l (l четно) и E_6. Заметим, что в этом случае* $\mathrm{Aut}(\pi) \cong \mathbb{Z}_2$.

2) *Если $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра внешнего типа, то $[T] = T$ для D_l (l четно).*

3) *Во всех остальных случаях $[T] = 1$.*

Доказательство. Если группа $\mathrm{Aut}(\pi)$ тривиальна, то доказывать нечего. Поэтому нам достаточно рассмотреть системы A_l ($l \geqslant 2$), D_l и E_6. Рассмотрим вначале тот случай, когда $-1 \notin \mathrm{Ad}(\Delta)$. В этом случае, как мы знаем, $\mathrm{Aut}(\pi) \cong \mathbb{Z}_2$. Так как $[T] = -ST \in \in \mathrm{Aut}(\pi)$, то при $T = 1$ мы имеем $[T] = -S \neq 1$, а при $T \neq 1$ имеем $-ST \neq T$ и $[T] = -ST = 1$. Единственный оставшийся случай — это D_l (l четно). Так как -1 принадлежит группе Вейля, то $S = -1$ и $[T] = T$. $\square$

Упражнение. Автоморфизм -1 не принадлежит группе Вейля системы E_6. [*Указание.* Пусть θ — нетривиальный автоморфизм системы π, и пусть S — элемент группы Вейля системы $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$ (*см. рис. 8*), для которого $S\pi' = -\pi'$. Тогда $-S\theta$ есть автоморфизм системы π, оставляющий на месте каждый элемент из π'. Покажите, что он оставляет на месте и α_4.]

8.8. Представление $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})|_{\mathfrak{p}}$

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{R}$ и

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

— ее разложение Картана. Как мы видели в § 4.5, отображение

$$\tau\colon X + Y \mapsto X - Y \quad (X \in \mathfrak{k},\ Y \in \mathfrak{p})$$

является автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}_0$ и

$$[\mathfrak{k},\ \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k},\ [\mathfrak{k},\ \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p},\ [\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Форма Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}_0$ отрицательно-определенна на $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$, положительно-определенна на $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, и $B\,(\mathfrak{k},\ \mathfrak{p}) = 0$. В (8.5.1) было показано, что представление

$$\psi\,(X) = \mathrm{ad}\,X\,|_{\mathfrak{p}} \text{ для } X \in \mathfrak{k}$$

точно и неприводимо.

(8.8.1) *Для всякой симметричной билинейной формы* S *на* $\mathfrak{p}$, *инвариантной относительно* $\psi\,(\mathfrak{k})$, *существует вещественное число* λ, *такое что* $S = \lambda B$ *на* $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$.

Доказательство. Для фиксированного Y из $\mathfrak{p}$ отображение $\mathfrak{p} \ni Z \longmapsto S\,(Y,\ Z)$ линейно. Поскольку форма B невырожденна на $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, существует такой элемент $Y' \in \mathfrak{p}$, что $B\,(Y',\ Z) = S\,(Y,\ Z)$. Отображение s: $Y \longmapsto Y'$, очевидно, линейно, и $B\,(sY,\ Z) = S\,(Y,\ Z)$ при $Y,\ Z \in \mathfrak{p}$. Для $X \in \mathfrak{k}$

$$B\,((\mathrm{ad}\,X)\,sY,\ Z) = B\,(sY,\ [Z,\ X]) = S\,(Y,\ [Z,\ X])$$
$$= S\,([X,\ Y],\ Z) = B\,(s\,[X,\ Y],\ Z).$$

Поэтому $\mathrm{ad}\,X \circ s = s \circ \mathrm{ad}\,X$ для всех $X \in \mathfrak{k}$.

С другой стороны, легко видеть, что $B\,(sY,\ Z) = B\,(Y,\ sZ)$. Поскольку B положительно-определенна на $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, мы можем найти такой базис $\{Y_1,\ \ldots,\ Y_n\}$ в $\mathfrak{p}$, что $B\,(Y_i,\ Y_j) = \delta_{ij}$. В этом базисе матрица отображения s симметрична. На основании упр. 8 § 1.2 мы заключаем, что $s = \lambda 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

(Приведенное доказательство аналогично доказательству, намеченному в указании к упр. 5 § 1.5.)

Комплексная структура на $\mathfrak{p}$ — это такой элемент $J \in \mathfrak{gl}\,(\mathfrak{p})$, что

(i) $J^2 = -1$,

(ii) $[J,\ \psi\,(\mathfrak{k})] = 0$,

(iii) $B\,(JY,\ JZ) = B\,(Y,\ Z)$ для $Y,\ Z \in \mathfrak{p}$.

(8.8.2) *Для всякой комплексной структуры* J *на* $\mathfrak{p}$ *существует единственный элемент* C *центра алгебры* $\mathfrak{k}$, *такой что* $J = \psi\,(C)$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что $[JY,\ JZ] = [Y,\ Z]$ для всех Y, Z из $\mathfrak{p}$. Действительно, для произвольного элемента X из $\mathfrak{k}$

$$B\,(X,\ [Y,\ Z]) = B\,(Y,\ [Z,\ X]) = B\,(JY,\ J\,[Z,\ X])$$
$$= B\,(JY,\ [JZ,\ X]) = B\,(X,\ [JY,\ JZ]).$$

Далее, введем в рассмотрение некоторую алгебру Ли $\mathfrak{l}$. Как векторное пространство $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{k}' = \psi(k) + \mathbb{R}J$. Заметим, что $\mathfrak{k}'$ есть подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$, ввиду (ii). Умножение в $\mathfrak{l}$, которое мы обозначим временно через $[\ ,\ ]'$, определяется следующим образом: если T_1 и T_2 принадлежат $\mathfrak{k}'$, то $[T_1, T_2]' = T_1T_2 - T_2T_1$ (это — обычное скобочное умножение в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$); если Y_1, Y_2 принадлежат $\mathfrak{g}$, то $[Y_1, Y_2]' = \psi([Y_1, Y_2])$; наконец, если T принадлежит $\mathfrak{k}$, а Y принадлежит $\mathfrak{p}$, то $[T, Y]' = -[Y, T]' = TY$ (образ элемента Y при линейном преобразовании T).

Тождество Якоби

$$[X, [Y, Z]']' + [Y, [Z, X]']' + [Z, [X, Y]']' = 0$$

следует из тождества Якоби в $\mathfrak{g}_0$, если $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ или если $X, Y \in \mathfrak{p}$, а $Z \in \psi(\mathfrak{k})$. В случае когда $X, Y \in \mathfrak{p}$ и $Z = J$, оно вытекает из равенства $[JX, JY] = [X, Y]$, а в случае когда $X \in \mathfrak{p}$ и $Y, Z \in \mathfrak{k}'$, — из определения операции $[\ ,\ ]'$.

Отождествим теперь $\mathfrak{g}_0$ с подалгеброй $\psi(\mathfrak{k}) + \mathfrak{p}$ в $\mathfrak{l}$ и обозначим $[\ ,\ ]'$ через $[\ ,\ ]$. Предположим, что $\mathfrak{g}_0$ строго содержится в $\mathfrak{l}$. Так как алгебра $\mathfrak{g}_0$ полупроста, то всякое ее представление вполне приводимо (см. (3.4.4)). Поскольку $\mathfrak{g}_0$ имеет коразмерность 1 в $\mathfrak{l}$, существует ненулевой элемент $X \in \mathfrak{l}$, такой что $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0 + \mathbb{R}X$ и $[\mathfrak{g}_0, X] \subset \mathbb{R}X$. Так как одномерное представление алгебры $\mathfrak{g}_0$ должно быть нулевым, то $[\mathfrak{g}_0, X] = 0$. Следовательно, X принадлежит центру алгебры $\mathfrak{l}$ и $X = \lambda J + Y + Z$, где $\lambda \neq 0$, $Y \in \mathfrak{p}$ и $Z \in \mathfrak{k}$. Но $0 = [J, X] = [J, Y] = JY$, и потому $Y = 0$. Таким образом, для любого U из $\mathfrak{p}$ мы имеем $0 = [X, U] = \lambda JU + ZU$, так что $J = -\lambda^{-1}Z$ и $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0$.

Итак, мы убедились в том, что $J \in \psi(\mathfrak{k})$. В силу (ii), J принадлежит центру алгебры $\psi(\mathfrak{k})$. Поскольку представление ψ точно, существует только один элемент $C \in \mathfrak{k}$, для которого $\psi(C) = J$. □

(8.8.3) *Комплексифицированное представление* $\psi^{\mathbb{C}}: \mathfrak{k} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})$ *неприводимо тогда и только тогда, когда алгебра* $\mathfrak{k}$ *полупроста.*

Доказательство. Пусть представление $\psi^{\mathbb{C}}$ неприводимо, и пусть X принадлежит центру алгебры $\mathfrak{k}$. В силу леммы Шура (1.2.3), $\psi^{\mathbb{C}}(X) = \lambda 1$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому для $Y, Z \in \mathfrak{p}$

$$0 = B(\psi^{\mathbb{C}}(X)Y, Z) + B(Y, \psi^{\mathbb{C}}(X)Z) = 2\lambda B(Y, Z).$$

Следовательно, $\lambda = 0$. Поскольку алгебра $\mathfrak{k}$ компактна, она полупроста.

Обратно, пусть $\psi^{\mathbb{C}}$ приводимо. Как мы видели в § 7.8,

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = V + \overline{V}, \quad V \cap \overline{V} = 0,$$

где V — некоторое $\mathfrak{k}$-инвариантное комплексное подпространство в $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. Далее, представление f алгебры $\mathfrak{k}$ в пространстве V и пред-

ставление $\bar{f}$ этой алгебры в пространстве $\overline{V}$ сопряжены относительно отображения $v \mapsto \bar{v}$. Согласно (7.7.1), существует взаимно-однозначное полулинейное отображение J_1 пространства V на себя, удовлетворяющее условию

$$J_0 \circ f(X) = f(X) \circ J_1 \quad \text{при } X \in \mathfrak{k}.$$

Кроме того, из соответствий, установленных в §§ 7.9 и 7.10, следует, что $\gamma(f) = -1$, т. е. можно считать, что J_1 удовлетворяет также условию $J_1^2 = -1$.

Зададим отображение $J\colon \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \mapsto \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ формулой

$$J(v + \overline{w}) = J_1 v + \overline{J_1 w}$$

и покажем, что J порождает комплексную структуру на $\mathfrak{p}$.

Прежде всего, $J(v + \bar{v}) = J_1 v + \overline{J_1 v}$, так что $J \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$. Далее, $J^2 = -1$, ибо $J_1^2 = -1$. Кроме того, отображение J коммутирует с $\psi(\mathfrak{k})$, поскольку этим свойством обладает J_1.

Покажем, наконец, что J сохраняет форму $B|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$. Пусть $\{Y_1, \ldots, Y\}_n$ — такой базис в $\mathfrak{p}$, что

$$B(Y_i, Y_j) = \delta_{ij} \quad \text{при } i, j = 1, \ldots, n.$$

Мы утверждаем, что матрица преобразования J относительно этого базиса (которую мы также обозначим через J) удовлетворяет условию ${}^tJJ = 1$. Действительно, в этом базисе ${}^t\psi(X) + \psi(X) = 0$ для каждого $X \in \mathfrak{k}$. Из условия $[J, \psi(\mathfrak{k})] = 0$ следует, что

$${}^t\psi(X)\,{}^tJJ + {}^tJJ\psi(X) = 0 \quad \text{при } X \in \mathfrak{k}.$$

Следовательно, симметричная билинейная форма, определяемая преобразованием ${}^tJJ$, инвариантна относительно $\psi(\mathfrak{k})$. В силу (8.8.1), существует вещественное число λ, такое что ${}^tJJ = \lambda 1$. Так как $J^2 = -1$, то $\det {}^tJJ = \det J^2 = (-1)^n = \lambda^n$. Значит, $\lambda^{2n} = 1$ и $\lambda = \pm 1$. Но форма ${}^tJJ$ положительно-определенна, так что $\lambda = 1$. Из равенства ${}^tJJ = 1$ следует (iii).

Поскольку $\mathfrak{p}$ обладает комплексной структурой, алгебра $\mathfrak{k}$ не полупроста, ввиду (8.8.2). □

Нахождение старших весов

А) $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра внутреннего типа. Предположим вначале, что алгебра $\mathfrak{k}$ не полупроста. Тогда

$$(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}, \psi^{\mathbb{C}}) = (V, f) + (\overline{V}, \bar{f});$$

будем искать старший вес ω представления (V, f). Как мы уже знаем, $\mathfrak{k}$ содержит некоторую подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$ и система простых корней алгебры $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ изоморфна одной из систем

Таблица 3

$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{k}$	ω
AIII	$\mathbb{R} \oplus A_{l-1}$	$\omega_{l-1}\,(A_{l-1})$
AIII	$\mathbb{R} \oplus A_{i-1} \oplus A_{l-i}$	$\omega_1\,(A_{i-1}) \oplus \omega_{l-i}\,(A_{l-i})$
BI	$\mathbb{R} \oplus B_{l-1}$	ω_1
CI	$\mathbb{R} \oplus A_{l-1}$	$2\omega_1$
DI	$\mathbb{R} \oplus A_{l-1}$	ω_1
DII	$\mathbb{R} \oplus A_{l-1}$	ω_1
EII	$\mathbb{R} \oplus D_5$	спинорное представление
EVII	$\mathbb{R} \oplus E_6$	ω_1

$\pi \diagdown \{\alpha_i\}$. Отсюда следует, что $-\alpha_0$ не является корнем алгебры $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ и потому вектор старшего веса в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — это $E_{-\alpha_0}$. Сужая $-\alpha_0$ на $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, мы получаем табл. 3 (где, как обычно, $(\omega_i,\ \alpha_j^*) = \delta_{ij}$).

Теперь обратимся к случаю, когда алгебра $\mathfrak{k}$ полупроста. В этом случае $\mathfrak{k}$ снова содержит некоторую подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Далее, вектором старшего веса для неприводимого представления $\psi^{\mathbb{C}}$ будет

$$E_{-\alpha_i},$$

где α_i — тот корень, который нужно вычеркнуть из $\tilde{\pi}$, чтобы получить диаграмму для $\mathfrak{k}$. В самом деле, поскольку вектор старшего веса единствен, достаточно лишь проверить, что

$$[E_\beta,\ E_{-\alpha_i}] = 0$$

для каждого β из системы простых корней алгебры $\mathfrak{k}$, а это легко следует из рассмотрения системы $\tilde{\pi}$ и из того факта, что ни $\alpha_j - \alpha_i$, ни $-\alpha_0 + \alpha_i$ не является корнем.

В результате мы получаем табл. 4.

В) $\mathfrak{g}_0$ — п о д а л г е б р а в н е ш н е г о т и п а. В этом случае алгебра $\mathfrak{k}$ всегда полупроста (см. (8.6.1)) и представление $\psi^{\mathbb{C}}$

Таблица 4

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	ω
BI	$A_1 \oplus A_1 \oplus B_{l-2}$	$\omega_1(A_1) \otimes \omega_1(A_1) \otimes \omega_1(B_{l-2})$
BI	$D_i \oplus B_{l-i}$	$\omega_1 \otimes \omega_1$
BI	D_l	ω_1
CII	$C_i \oplus C_{l-i}$	$\omega_1 \otimes \omega_1$
DI	$A_1 \oplus A_1 \oplus D_{l-2}$	$\omega_1 \otimes \omega_1 \otimes \omega_1$
DI	$D_i \oplus D_{l-i}$	$\omega_1 \otimes \omega_1$
EII	$A_1 \oplus A_5$	$\omega_1 \otimes \omega_3$
EV	A_7	ω_4
EVI	$A_1 \oplus D_6$	$\omega_1 \otimes$ (спинорное представление)
EVIII	D_8	спинорное представление
EIX	$A_1 \oplus E_7$	$\omega_1 \otimes \omega_1$
FI	$A_1 \oplus C_3$	$\omega_1 \otimes \omega_3$
FII	B_4	ω_4
G	$A_1 \oplus A_1$	$\omega_1 \otimes 3\omega_1$

неприводимо. Поскольку $\mathfrak{k}$ не содержит ни одной подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$, этот случай требует детальных вычислений для нахождения тех корней ω алгебры $\mathfrak{g}$, для которых E_ω не принадлежит $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ (Разложения алгебр $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ были получены в § 8.6.) Результаты вычислений представлены в табл. 5.

Таблица 5

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	ω
AI	B_f	$2\omega_1$
AI	D_f	$2\omega_1$
AII	C_f	ω_2
DI	B_{l-1}	ω_1
DI	$B_i \oplus B_{l-i-1}$	$\omega_1 \otimes \omega_1$
EI	F_4	ω_4 (26-мерное представление)
EIV	C_4	ω_4

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{AI}$ с максимальной компактной подалгеброй B_f. Старший корень алгебры $\mathfrak{g}$ — это корень $-\alpha_0 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{2f}$, его проекция на B_f равна

$$2(\gamma_1' + \cdots + \gamma_f') = 2\omega_1.$$

Далее,

$$[E_\beta, E_{-\alpha_0}] = 0$$

для каждого E_β из $\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}$.

Пример 2. Пусть $L = \mathrm{DI}$ с максимальной компактной подалгеброй B_{l-1}. Далее, пусть

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{l-2} + \gamma_1.$$

Проекция ω на B_{l-1} равна

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \cdots + \alpha_{l-2}' + \omega_1' = \omega_1.$$

Снова можно проверить, что

$$[E_\beta, E_\omega] = 0$$

для всех E_β из $\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}$.

Добавление

ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ

1. Обзор основных понятий

В этом параграфе мы напомним некоторые основные понятия и факты теории линейных операторов. Особенно важны для нас разложение, получаемое в (Д.1.1), и теория собственных значений и собственных векторов.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем P. *Линейное преобразование* T пространства V (или *линейный оператор* в V) — это отображение $T\colon V \to V$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $T(v + w) = Tv + Tw$ для всех векторов $v, w \in V$;

2) $T(cv) = cTv$ для всех векторов $v \in V$ и скаляров $c \in P$.

Пусть $\mathfrak{gl}(V)$ — множество всех линейных преобразований пространства V. Покажем, что $\mathfrak{gl}(V)$ можно наделить структурой ассоциативной алгебры над P. Прежде всего, если T_1 и T_2 принадлежат $\mathfrak{gl}(V)$, то мы определяем отображение $T_1 + T_2$ пространства V в себя формулой

$$(T_1 + T_2)\,v = T_1v + T_2v$$

для всех $v \in V$. Легко проверяется, что $T_1 + T_2$ — линейное преобразование пространства V. Далее, если $c \in P$ и $T \in \mathfrak{gl}(V)$, то мы определяем отображение cT формулой

$$(cT)\,v = c\,(Tv)$$

для всех $v \in V$. Снова из определения легко следует, что cT — линейное преобразование пространства V. С этими операциями сложения и умножения на скаляр $\mathfrak{gl}(V)$ становится векторным пространством над P. Аддитивной единицей служит преобразование 0, определяемое формулой

$$0v = 0$$

для всех $v \in V$. (Символ 0 в правой части равенства обозначает нулевой вектор из V, а в левой части — нулевое линейное преобразование.)

Для любых двух линейных преобразований $T, U \in \mathfrak{gl}(V)$ определим отображение TU формулой

$$TUv = T\,(Uv)$$

для всех $v \in V$. Нетрудно убедиться, что TU также является линейным преобразованием. Далее, выполняются следующие условия:

1) $S(TU) = (ST)U$ для всех $S, T, U \in \mathfrak{gl}(V)$;

2) $(S+T)U = SU + TU$ и $S(T+U) = ST + SU$ для всех $S, T, U \in \mathfrak{gl}(V)$;

3) $a(ST) = (aS)T = S(aT)$ для всех $a \in P$ и всех $S, T \in \mathfrak{gl}(V)$.

Ассоциативная алгебра $\mathfrak{gl}(V)$ имеет мультипликативную единицу I, где $Iv = v$ для всех $v \in V$.

Зафиксируем теперь какой-нибудь базис $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V. При помощи этого базиса мы можем связать с каждым линейным преобразованием T некоторую $n \times n$-матрицу $\varphi_B(T)$. А именно предположим, что

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

для каждого $j = 1, \ldots, n$. Тогда мы определяем $\varphi_B(T)$ как $n \times n$-матрицу, у которой на (i, j)-м месте стоит элемент a_{ij}, т. е. $\varphi_B(T) = (a_{ij})$. Отображение φ_B является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ на алгебру всех $n \times n$-матриц над P. Поскольку последняя алгебра имеет размерность n^2 над P, то же справедливо и для $\mathfrak{gl}(V)$.

Используя этот изоморфизм, можно ввести понятие *определителя линейного преобразования* T, полагая

$$\det T = \det(\varphi_B(T)).$$

Это определение не зависит от выбора базиса. Действительно, если B^1 — какой-нибудь другой базис, то существует обратимая $n \times n$-матрица Q, такая что $\varphi_B(T) = Q\varphi_{B^1}(T)Q^{-1}$. Следовательно,

$$\det \varphi_B(T) = \det(Q\varphi_{B^1}(T)Q^{-1})$$

$$= \det Q \det \varphi_{B^1}(T)(\det Q)^{-1} = \det \varphi_{B^1}(T).$$

Напомним, что $\det T = 0$ тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $v \in V$, для которого $Tv = 0$.

Пусть $P[x]$ — алгебра многочленов над P. Как хорошо известно, $P[x]$ является областью (целостным кольцом) главных идеалов и любые два многочлена f_1 и f_2 из $P[x]$ (хотя бы один из которых отличен от нуля) имеют наибольший общий делитель d. Этот многочлен d есть единственный монический [1] многочлен наименьшей степени вида $g_1 f_1 + g_2 f_2$, где g_i — произвольные многочлены из $P[x]$. Мы будем обычно писать $d = (f_1, f_2)$.

---

[1] *Моническими* называют многочлены, у которых коэффициент при старшей степени переменной x равен 1. — *Прим. ред.*

Зафиксируем линейное преобразование T и определим с его помощью некоторый гомоморфизм из $P[x]$ в $\mathfrak{gl}(V)$. Пусть

$$f = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

— элемент из $P[x]$. Положим

$$\alpha(f) = a_m T^m + \ldots + a_1 T + a_0 1 = f(T).$$

Отображение α является гомоморфизмом. Изучим его ядро J.

Оно содержит ненулевые многочлены. Действительно, пусть m — произвольное натуральное число, большее, чем $n^2 = \dim \mathfrak{gl}(V)$. Линейные преобразования

$$T,\ T^2,\ \ldots,\ T^m$$

должны быть линейно-зависимы, и потому существуют скаляры $a_1, \ldots, a_m \in P$, хотя бы один из которых отличен от 0, удовлетворяющие условию

$$a_m T^m + \ldots + a_2 T^2 + a_1 T = 0.$$

Следовательно, полагая

$$f = a_m x^m + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x,$$

мы получим $\alpha(f) = 0$. Поскольку J — ненулевой идеал в $P[x]$, существует единственный монический полином m_T из $P[x]$, такой что $J = (m_T)$ = (множество всех многочленов, кратных m_T).

Многочлен m_T называется *минимальным многочленом преобразования* T. Он обладает следующими свойствами:

1) m_T — монический многочлен, и $m_T(T) = 0$;

2) любой многочлен f, для которого $f(T) = 0$, делится на m_T.

Прежде чем сформулировать основной результат о минимальном многочлене линейного оператора, введем еще одно определение. Подпространство W пространства V называется *T-инвариантным*, если $Tw \in W$ для каждого $w \in W$. В этом случае ограничение преобразования T на W является линейным преобразованием пространства W, также обозначаемым через T.

(Д.1.1) *Пусть $T: V \to V$ — линейное преобразование с минимальным многочленом m_T. Предположим, что $m_T = m_1 m_2$,* где $(m_1, m_2) = 1$. *Тогда существуют подпространства W_1 и W_2 в V, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *W_1 и W_2 являются T-инвариантными;*

2) *$V = W_1 \oplus W_2$, т. е. $V = W_1 + W_2$ и $\{0\} = W_1 \cap W_2$;*

3) *минимальный многочлен оператора T в W_i равен m_i, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Определим два искомых подпространства в V следующим образом:

$$W_1 = \{v \in V:\ m_1(T)\,v = 0\} \quad \text{и} \quad W_2 = \{v \in V:\ m_2(T)\,v = 0\}.$$

Каждое из этих подпространств T-инвариантно, поскольку для $v \in W_i$

$$m_i(T)\,Tv = Tm_i(T)\,v = T0 = 0.$$

Далее, пусть f_1 и f_2 — многочлены из $P[x]$, такие что $f_1m_1 + f_2m_2 = 1$. Для $v \in W_1 \cap W_2$

$$v = Iv = (f_1(T)\,m_1(T) + f_2(T)\,m_2(T))\,v$$

$$= f_1(T)\,m_1(T)\,v + f_2(T)\,m_2(T)v = 0,$$

поскольку $m_i(T)\,v = 0$. С другой стороны, для любого вектора v из V мы имеем

$$v = Iv = f_1(T)\,m_1(T)\,v + f_2(T)\,m_2(T)\,v.$$

Вектор $f_1(T)\,m_1(T)\,v$ принадлежит W_2, так как

$$m_2(T)\,f_1(T)\,m_1(T)\,v = f_1(T)\,m_1(T)\,m_2(T)\,v$$

$$= f_1(T)\,m_T(T)\,v = 0v = 0.$$

Аналогично $f_2(T)\,m_2(T)\,v \in W_1$.

Наконец, пусть g_i — минимальный многочлен оператора T в W_i. Для каждого $v \in W_1$ имеет место равенство $m_1(T)\,v = 0$, поэтому g_1 делит m_1. Предположим, что $\deg g_1 < \deg m_1$. Линейное преобразование $g_1(T)\,m_2(T)$ обращается в 0 на V. Действительно, пусть $v \in V$ и $v = w_1 + w_2$, где $w_i \in W_i$. Тогда

$$g_1(T)\,m_2(T)\,v = m_2(T)\,g_1(T)\,w_1 + g_1(T)\,m_2(T)\,w_2$$

$$= m_2(T)\,0 + g_1(T)\,0 = 0.$$

Таким образом, $m_T = m_1m_2$ делит g_1m_2, что невозможно, поскольку

$$\deg m_T = \deg m_1 + \deg m_2 > \deg g_1 + \deg m_2 = \deg g_1m_2.$$

Следовательно, $g_1 = m_1$. Аналогично минимальный многочлен оператора T в W_2 равен m_2. ▯

В заключение этого обзора напомним основные понятия теории собственных векторов и собственных значений. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* преобразования T, если существует скаляр $c \in P$, такой что $Tv = cv$. В этом случае скаляр c называется *собственным значением* (*собственным числом*) преобразования T.

Таким образом, c является собственным значением T тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $v \in V$, для которого $(cI - T)\,v = 0$. Как было замечено выше, это эквива-

лентно условию $\det(cI - T) = 0$. *Характеристический многочлен* f_T преобразования T определяется формулой

$$f_T(x) = \det(xI - T).$$

Принадлежащие P корни характеристического многочлена являются собственными значениями преобразования T.

(Д.1.2) *Пусть* $T\colon\ V \to V$ — *линейное преобразование. Если* $v_1, \ldots, v_m$ — *собственные векторы этого преобразования, отвечающие различным собственным значениям* $c_1, \ldots, c_m$, *то* $v_1, \ldots, v_m$ *линейно-независимы.*

Доказательство. Допустим, что множество $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно-зависимо. Среди всех соотношений линейной зависимости выберем какое-нибудь одно, имеющее наименьшее число ненулевых коэффициентов. Меняя, если надо, нумерацию, мы можем считать, что это соотношение имеет вид

$$(*) \qquad a_1v_1 + \ldots + a_rv_r = 0,$$

где все a_i отличны от нуля. Так как все векторы v_i ненулевые, то $r \geqslant 2$. Применяя преобразование T к равенству $(*)$, получаем

$$(**) \quad T(a_1v_1 + \ldots + a_rv_r) = a_1c_1v_1 + \ldots + a_rc_rv_r = 0.$$

Умножим $(*)$ на c_1 и вычтем из последнего равенства:

$$a_2(c_2 - c_1)v_2 + \ldots + a_r(c_r - c_1)v_r = 0.$$

Поскольку $c_1 \neq c_2$, мы получили более короткое соотношение линейной зависимости, чем доказательство и завершается. $\square$

Пусть $T\colon\ V \to V$ — линейное преобразование, и пусть

$$f_T(x) = \det(xI - T) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Теорема Гамильтона—Кэли утверждает, что $f_T(T) = 0$, т. е.

$$T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1T + a_0I = 0.$$

Отсюда следует, что m_T делит f_T. Нам будет удобнее доказать эту теорему не для линейных преобразований, а для матриц. Ниже I обозначает единичную $n\times n$-матрицу.

(Д.1.3) *Пусть* A — *матрица размера* $n\times n$ *с элементами из* P *и*

$$f_A(x) = \det(xI - A) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Тогда

$$0 = f_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I.$$

Доказательство. Пусть L — произвольное поле и C — матрица размера $n\times n$ с элементами из L. Будем обозначать матрицу, присоединенную к C, через adj C. Напомним, что

$$C \operatorname{adj} C = \det C\cdot I.$$

Применим это равенство к случаю, когда $C = xI - A$ (а L есть $P(x)$ — поле рациональных функций над P). Получим

$$(*)\qquad (xI - A)\operatorname{adj}(xI - A) = \det(xI - A)\cdot I = f_A(x)\, I.$$

Элементами матрицы adj $(xI - A)$ служат многочлены, и мы можем записать

$$\operatorname{adj}(xI - A) = B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m,$$

где B_i — матрицы размера $n\times n$ с элементами из P. В этих обозначениях равенство (*) принимает вид

$$(xI - A)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m) = f_A(x)\, I.$$

Перепишем это следующим образом:

$$-AB_0 + x(B_0 - AB_1) + \ldots + x^m(B_{m+1} - AB_m) + x^{m+1}B_m$$
$$= f_A(x)\, I = x^nI + a_{n-1}x^{n-1}I + \ldots + a_1xI + a_0I.$$

Подставляя A вместо x, получаем

$$f_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I$$
$$= -AB_0 + A(B_0 - AB_1) + \ldots$$
$$+ A^m(B_{m-1} - AB_m) + A^{m+1}B_m = 0. \quad \square$$

2. Вполне приводимые операторы

Пара (V, Σ) называется *пространством с операторами*, если V — конечномерное векторное пространство над P, а Σ — некоторое множество линейных преобразований пространства V. Два пространства с операторами (V, Σ) и (V^1, Σ^1) называются *изоморфными*, если существуют изоморфизм векторных пространств φ: $V \to V^1$ и взаимно-однозначное сюръективное отображение ψ: $\Sigma \to \Sigma^1$, такие что $\varphi \circ S = \psi(S) \circ\varphi$ для каждого $S \in \Sigma$.

Пусть (V, Σ) — пространство с операторами. Подпространство W пространства V называется Σ-*инвариантным* (или *инвариантным относительно* Σ), если $SW \subset W$ для любого $S\in\Sigma$. В случае когда $0 \neq W \neq V$, мы можем построить, исходя из W, два пространства с операторами. Во-первых, всякий оператор $S\in\Sigma$ порождает линейное преобразование пространства W посредством

взятия ограничения $S \to S|_W$. Подпространство W вместе со всеми его линейными преобразованиями, полученными из элементов множества Σ с помощью ограничения, обозначается через $(W, \Sigma|_W)$. Во-вторых, каждый оператор $S \in \Sigma$ обычным образом порождает линейное преобразование $\overline{S}$ факторпространства V/W:

$$\overline{S}(v + W) = Sv + W.$$

Это отображение определено корректно, поскольку для любого $w \in W$

$$\overline{S}(v + w + W) = Sv + Sw + W = Sv + W,$$

и легко проверяется, что оно является линейным оператором в V/W. Пространство V/W вместе со всеми его линейными преобразованиями, полученными из элементов множества Σ, образует пространство с операторами, обозначаемое через $(V/W, \overline{\Sigma})$.

Пусть (V, Σ) — произвольное пространство с операторами. Если $\{0\}$ и V — единственные Σ-инвариантные подпространства в V, то (V, Σ) (а часто и само V) называется *неприводимым*. В случае когда $\dim V \geqslant 1$, всегда существует хотя бы одно ненулевое Σ-инвариантное подпространство Z пространства V, для которого $(Z, \Sigma|_Z)$ неприводимо. В самом деле, мы можем взять в качестве Z любое ненулевое Σ-инвариантное подпространство в V, имеющее минимальную размерность.

Пространство с операторами (V, Σ) называется *вполне приводимым*, если для каждого Σ-инвариантного подпространства W в V существует Σ-инвариантное подпространство W^1, такое что $V = W \oplus W^1$.

(Д.2.1) *Пара (V, Σ) вполне приводима тогда и только тогда, когда существует набор подпространств $W_1, \ldots, W_m$ пространства V, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *каждое W_i является Σ-инвариантным и каждое $(W_i, \Sigma|_{W_i})$ неприводимо;*

2) *V есть прямая сумма подпространств $W_1, \ldots, W_m$.*

Доказательство. Пусть пространство с операторами (V, Σ) вполне приводимо. Обозначим через $\mathscr{K}$ класс всех Σ-инвариантных подпространств, являющихся прямыми суммами неприводимых Σ-инвариантных подпространств. Пусть $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ — какое-либо максимальное подпространство из $\mathscr{K}$. Мы утверждаем, что $W = V$. В самом деле, если $W \neq V$, то $V = W \oplus W^1$, где W^1 — ненулевое Σ-инвариантное подпространство. Пусть Z^1 — ненулевое Σ-инвариантное неприводимое подпространство в W^1. Тогда $W \oplus Z^1 \in \mathscr{K}$, что противоречит максимальности W. Итак, $V = W$

$\in \mathscr{K}$, т. е. V представимо в виде прямой суммы неприводимых Σ-инвариантных подпространств.

Обратно, пусть V является прямой суммой Σ-инвариантных подпространств, скажем $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$, где все $\left(W_i, \sum|_{W_i}\right)$ неприводимы. Пусть W — произвольное Σ-инвариантное подпространство в V. Если $W = V$, то можно взять $W^1 = 0$. В противном случае $W \subsetneqq V$. Подпространство $W \cap W_i$ Σ-инвариантно и содержится в W_i. Поэтому оно равно $\{0\}$ или W_i. Поскольку $W \neq V$, найдется номер j, для которого $W \cap W_j = \{0\}$.

Пусть l — наибольшее целое число, для которого существуют индексы $i_1, \ldots, i_l$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant m$, такие что

$$W \cap (W_{i_1} + \ldots + W_{i_l}) = \{0\}.$$

Положим

$$W^1 = W_{i_1} + \ldots + W_{i_l}$$

и покажем, что

$$V = W + W^1.$$

Прежде всего, $W \cap W^1 = \{0\}$, в силу нашего выбора подпространства W^1. Далее, пусть i — какой-нибудь индекс ($1 \leqslant i \leqslant m$), не входящий в $\{i_1, \ldots, i_l\}$. Ввиду максимальности l

$$W \cap (W_{i_1} + \ldots + W_{i_l} + W_i) \neq \{0\}.$$

Пусть вектор

$$w = w_{i_1} + \ldots + w_{i_l} + w_i \neq 0$$

принадлежит W, причем

$$w_{i_j} \in W_{i_j} \quad \text{и} \quad w_i \in W_i.$$

Тогда $w_i \neq 0$ и потому

$$W_i \cap (W_{i_1} + \ldots + W_{i_l} + W) \neq \{0\}.$$

Следовательно,

$$W_i \subset W^1 + W. \ \square$$

Упражнение. Пусть (V, Σ) — вполне приводимое пространство с операторами и W — произвольное Σ-инвариантное подпространство в V. Показать, что пары $(W, \Sigma|_W)$ и $(V/W, \bar{\Sigma})$ вполне приводимы.

3. Расширение основного поля

Пусть L — некоторое поле, содержащее P. *Группа Галуа* поля L над P состоит из всех автоморфизмом σ поля L, для которых $a^\sigma = a$ при всех $a \in P$ (мы пишем a^σ вместо σa). Будем обозначать

эту группу через Gal $(L \mid P)$. Далее, предположим, что поле L алгебраически замкнуто. Поле P называется *совершенным*, если выполняется следующее условие: если $a \in L$ и $a^\sigma = a$ для всех $\sigma \in \text{Gal}\,(L \mid P)$, то $a \in P$.

Пусть теперь V — векторное пространство над P, имеющее базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, и L — произвольное поле, содержащее P. Тогда мы получаем векторное пространство V^L над L, как было описано в § 1.6 основного текста, и $\{e_1, \ldots, e_n\}$ будет базисом пространства V^L над L. Действие группы Gal $(L \mid P)$ на L порождает действие этой группы на V^L следующим образом. Пусть $\sigma \in \text{Gal}\,(L \mid P)$ и $v \in V^L$. Если

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j,$$

то мы полагаем

$$v^\sigma = \sum_{j=1}^{n} a_j^\sigma e_j.$$

Это действие не зависит от выбора базиса в V.

(Д.3.1) *Предположим, что поле L алгебраически замкнуто, а поле P совершенно. Если W — такое подпространство в V^L, что*

$$W^\sigma = \{w^\sigma\colon\ w \in W\} = W$$

для любого $\sigma \in \text{Gal}\,(L \mid P)$, то $W \cap V$ содержит некоторый базис пространства W.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $v \in V^L$, то $v^\sigma = v$ для всех $\sigma \in \text{Gal}\,(L \mid P)$ тогда и только тогда, когда $v \in V$. Действительно, пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — какой-нибудь базис в V и $v = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$. Тогда $v^\sigma = v$ для всех $\sigma \in \text{Gal}\,(L \mid P)$ в том и только том случае, когда $a_j^\sigma = a_j$ для каждого $j = 1, \ldots, n$. Это показывает, что $v^\sigma = v$ для всех σ тогда и только тогда, когда все a_j принадлежат P и, значит, $v \in P$.

Теперь предположим, что нумерация базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ выбрана так, что $\{e_1 + W, \ldots, e_m + W\}$ есть базис в V^L/W. Тогда однозначно определены элементы $a_{jk} \in L$, такие что

$$e_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} e_k \pmod{W}$$

для $j = m+1, \ldots, n$. Далее, $a_{jk} \in P$. В самом деле, если $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(L \mid P)$, то

$$e_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}e_k \,(\mathrm{mod}\, W) = e_j^{\sigma} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}^{\sigma}e_k \,(\mathrm{mod}\, W)$$

и, значит, $a_{jk}^{\sigma} = a_{jk}$.

Покажем, что элементы

$$f_j = e_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk}e_k, \quad j = m+1, \ \ldots, \ n,$$

образуют базис пространства W и лежат в $V \cap W$. Как мы только что видели, каждый элемент f_j принадлежит $W \cap V$. Далее, легко проверяется, что эти элементы линейно-независимы. Если w — произвольный элемент из W, то

$$w = \sum_{j=1}^{m} b_j e_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} d_j e_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j \left(e_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk}e_k\right) = \sum_{j=1}^{m} d_j e_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j f_j$$

при подходящих b_j, c_j и d_j. Следовательно, $\sum_{j=1}^{m} d_j e_j \in W$ и, в силу нашего выбора элементов $\{e_1, \ldots, e_m\}$, все d_j равны 0. Это показывает, что элементы f_j порождают W. □

Пусть Σ — некоторое множество линейных преобразований пространства V. Каждое преобразование $S \in \Sigma$ порождает линейное преобразование пространства V^L (как описано в § 1.6), которое мы также будем обозначать через S. Таким образом, Σ можно рассматривать как множество линейных преобразований пространства V^L.

(Д.3.2) *Пусть V — векторное пространство над P, Σ — некоторое множество линейных преобразований этого пространства и L — некоторое поле, содержащее P.*

1) *Если пара (V^L, Σ) вполне приводима, то и пара (V, Σ) вполне приводима.*

2) *Если поле P совершенно и пара (V, Σ) вполне приводима, то пара (V^L, Σ) тоже вполне приводима.*

Доказательство. 1) Пусть U — Σ-инвариантное подпространство в V. Тогда U^L будет Σ-инвариантным подпространством в V^L, и потому существует Σ-инвариантное подпространство W^1 в V^L, удовлетворяющее условию $V^L = U^L \oplus W^1$.

Пусть U^1 — какое-нибудь подпространство в V, дополнительное к U, т. е. $V = U \oplus U^1$. Обозначим через π и π^1 проекции на U и U^1 соответственно. Заметим, что если $S \in \sum$ и $u^1 \in U^1$, то

$$Su^1 = \pi Su^1 + \pi^1 Su^1.$$

Пусть $\psi^1\colon V^L \to U^L$ — проекция, отвечающая разложению $V^L = U^L \oplus W^1$. Пусть, далее, (a_i), $i \in I$, — базис L над P, выбранный так, что в число его элементов входит $a_{i_0} = 1$. Для каждого $u^1 \in U^1$ однозначно определены элементы $u_i \in U$, такие что

$$\psi^1(u^1) = \sum_{i \in I} u_i a_i.$$

Определим отображение $\psi\colon U^1 \to U$, полагая $\psi(u^1) = u_{i_0}$. Очевидно, это отображение линейно над P.

Положим $W = \{u^1 - \psi(u^1)\colon u^1 \in U^1\}$. В силу P-линейности ψ, W является подпространством в V. Далее, $V = U \oplus W$. Действительно, если $v \in U \cap W$, то существуют элементы $u_1^1, \ldots, u_k^1$ из U^1, такие что

$$v = \sum_{i=1}^{k} (u_i^1 - \psi(u_i^1)).$$

Следовательно, $u_1^1 + \ldots + u_k^1 \in U \cap U^1$ и, значит, $u_1^1 + \ldots + u_k^1 = 0$ и $v = 0$. Кроме того, $U \subset U + W$, и если $u^1 \subset U^1$, то

$$u^1 = \psi(u^1) + (u^1 - \psi(u^1)) \in U + W.$$

Наконец, покажем, что подпространство W Σ-инвариантно. Пусть $S \in \Sigma$ и $u^1 \in U^1$. Тогда из равенства $\psi^1 Su^1 = S\psi^1 u^1$ следует, что

$$\psi^1(\pi^1 Su^1) = \psi^1(Su^1 - \pi Su^1) = S\psi^1 u^1 - \pi Su^1,$$

и потому $\psi(\pi^1 Su^1) = S\psi u^1 - \pi Su^1$. Следовательно,

$$S(u^1 - \psi(u^1)) = Su^1 - S\psi u^1 = Su^1 - (\psi\pi^1 Su^1 + \pi Su^1)$$
$$= Su^1 - \pi Su^1 - \psi\pi^1 Su^1 = \pi^1 Su^1 - \psi(\pi^1 Su^1) \in W. \ \square$$

2) Ввиду 1) достаточно показать, что пара (V^L, Σ) вполне приводима в случае, когда поле L алгебраически замкнуто. (Возьмем алгебраически замкнутое поле K, содержащее L. Если известно, что пара (V^K, Σ) вполне приводима, то, в силу 1), и пара (V^L, Σ) вполне приводима.) Для этого случая мы докажем, что если пара (V, Σ) неприводима, то пара (V^L, Σ) вполне приводима. Тогда общий случай будет следовать из (Д.2.1).

Пусть Z — произвольное ненулевое Σ-инвариантное подпространство в V^L, для которого пара $(Z, \Sigma|_Z)$ неприводима. Если

$\sigma \in \mathrm{Gal}\,(L \mid K)$, то Z^σ — также Σ-инвариантное подпространство в V^L. Положим

$$W = \sum_{\sigma} Z^\sigma,$$

где суммирование ведется по всем $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(L \mid K)$. Тогда $W^\sigma = W$ для всех $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(L \mid K)$ и, согласно (Д.3.1), W обладает базисом, содержащимся в V. Так как подпространство $W \cap V$ является Σ-инвариантным, то $W \cap V = V$ и $W = V^L$. Таким образом, пространство V^L разлагается в прямую сумму Σ-инвариантных неприводимых подпространств и, значит, в силу (Д.2.1), вполне приводимо. $\square$

4. Полупростые операторы

Прежде чем приводить основные факты о полупростых операторах, мы должны сформулировать и доказать теорему Тейлора. Пусть P — поле. Если $f \in P\,[x]$ и

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

то многочлен

$$f' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$$

называется *производной многочлена* f. По индукции определяются высшие производные:

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' \quad \text{для } k = 2, \ \ldots .$$

Легко проверить, что так определенная операция обладает обычными свойствами дифференцирования:

1) $(f + g)' = f' + g'$ для всех $f, g \in P\,[x]$;

2) $(cf)' = cf'$ для всех $f \in P\,[x]$;

3) $(fg)' = fg' + f'g$ для всех $f, g \in P\,[x]$.

Нам понадобится одно следствие утверждения 3), легко доказываемое по индукции:

4) $\left(f^n\right)' = nf^{n-1}f'$ для всех $f \in P[x]$ и $n = 1, 2, \ \ldots .$

Замечание. Предположим, что f — неприводимый многочлен из $P\,[x]$. В каком случае наибольший общий делитель многочленов f и f', обозначаемый через (f, f'), равен 1? По предположению делителями f могут быть только скаляры и многочлены вида cf. Следовательно, если $f' \neq 0$, то $(f, f') = 1$. Это всегда так, если P имеет

характеристику 0. Однако если char $P = p > 0$, то f' может быть равен 0 и тогда $(f, f') = f$. В теории Галуа доказывается, что если поле P совершенно, то (f, f') всегда равняется 1.

Формула Тейлора. *Пусть f — многочлен над P и x, y — переменные над P. Тогда*

$$f(x+y) = f_0(x) + f_1(x)y + \ldots + f_n(x)y^n,$$

где

$$k!\,f_k(x) = f^{(k)}(x)$$

для $k = 0, \ldots, n$.

Доказательство. Простое возведение в степень и приведение подобных членов в $f(x+y)$ показывают, что существуют многочлены $f_0(x), \ldots, f_n(x)$, такие что

$$f(x+y) = f_0(x) + f_1(x)y + \ldots + f_n(x)y^n.$$

Последовательно дифференцируя это равенство по y и применяя правило (4), получаем

$$f'(x+y) = f_1(x) + 2f_2(x)y + \ldots + nf_n(y)y^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(k)}(x+y) = k!f_k(x) + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)f_n(x)y^{n-k}.$$

Поскольку x и y — переменные, мы можем заменить в каждом из написанных выше равенств y на 0. Это дает искомую формулу. ▭

Пусть, как обычно, V — конечномерное векторное пространство над P. Линейное преобразование $S\colon V \to V$ называется *полупростым*, если пара $(V, \{S\})$ вполне приводима.

(Д.4.1) *Пусть P — совершенное поле, L — алгебраически замкнутое поле, содержащее P, V — конечномерное векторное пространство над P и $S\colon V \to V$ — линейное преобразование.*

1) *Преобразование S полупросто тогда и только тогда, когда V^L обладает базисом, состоящим из собственных векторов этого преобразования.*

2) *Если $f \in P[x]$ и S полупросто, то $f(S)$ полупросто.*

3) *Если S и T — полупростые линейные преобразования в V, такие что $ST = TS$, то $S - T$ полупросто.*

Доказательство. Согласно (Д.3.2), S полупросто тогда и только тогда, когда пара $(V^L, \{S\})$ вполне приводима. Поскольку L алгебраически замкнуто, единственными S-неприводимыми подпространствами в V^L служат $\{0\}$ и одномерные подпространства, порожденные собственными векторами преобразования S. Поэтому утверждение 1) следует из (Д.2.1).

Чтобы доказать утверждение 2), возьмем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V^L, такой что $Se_i = c_i e_i$ при подходящих $c_i \in L$. Тогда $f(S)e_i = f(c_i)e_i$ и, значит, $f(S)$ полупросто, в силу 1).

Далее, пусть $c_1, \ldots, c_k$ — различные собственные значения оператора S. Положим

$$V_i = \{v \in V^L\colon\ Sv = c_i v\} \quad \text{для } i = 1, \ \ldots, \ k.$$

Пространства $V_1, \ldots, V_k$ инвариантны относительно T. В самом деле, если $v \in V_i$, то

$$STv = TSv = T(c_i v) = c_i Tv.$$

Поскольку оператор T полупрост в V, он полупрост и в V_i (согласно упражнению к § 2). В силу 1), существует базис $\{w_1, \ldots, w_r\}$ пространства V_i, удовлетворяющий условиям

$$Sw_j = c_i w_j, \quad Tw_j = d_j w_j. \ \square$$

(Д.4.2) *Пусть поле P совершенно. Для того чтобы линейное преобразование $S\colon V \to V$ было полупростым, необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен $f \in P[x]$, удовлетворяющий условиям $(f, f') = 1$ и $f(S) = 0$.*

Доказательство. Пусть S полупросто. Если V имеет размерность n, то преобразования $1, S, \ldots, S^{n^2}$ линейно-зависимы над P. Следовательно, существует ненулевой многочлен $F \in P[x]$, для которого $F(S) = 0$. Пусть

$$F = cF_1^{e_1} \ldots F_r^{e_r},$$

где $(F_i, F_j) = 1$ для $i \neq j$, — разложение F на неприводимые многочлены в $P[x]$. Положим $f = F_1 \ldots F_r$ и обозначим через e наименьшее общее кратное чисел $e_1, \ldots, e_r$. Тогда f^e делится на F и потому $f(S)^e = 0$. В то же время преобразование $f(S)$ полупросто, и равенство $f(S)^e = 0$ показывает, что все собственные значения этого преобразования равны 0. Следовательно, $f(S) = 0$. Далее, $(f, f') = 1$, поскольку $(F_i, F_i') = 1$ и

$$f' = F_1' F_2 \ldots F_r + \ldots + F_1 \ldots F_{r-1} F_r'.$$

Обратное, предположим, что существует многочлен $f \in P[x]$, удовлетворяющий условиям $(f, f') = 1$ и $f(S) = 0$. Пусть L — алгебраически замкнутое поле, содержащее K. Тогда f можно рассматривать как многочлен из $L[x]$, для которого $f(S) = 0$. Далее, $(f, f') = 1$ в $L[x]$, так как существуют многочлены g, h из $P[x] \subset L[x]$, удовлетворяющие условию $gf + hf' = 1$. Со-

гласно (Д.3.2), нам достаточно доказать, что S является полупростым оператором в V^L.

Так как поле L алгебраически замкнуто, то

$$f(x) = c(x - a_1)\dots(x - a_k),$$

где $c, a_1, \dots, a_k \in L$ (причем каждый корень имеет кратность 1, ибо $(f, f') = 1$). Положим

$$f_i(x) = (x - a_i)^{-1} f(x)$$

для $i = 1, \dots, k$. Так как наибольший общий делитель многочленов $f_1, \dots, f_k$ равен 1, то существуют многочлены $g_1, \dots, g_k$ из $L[x]$, такие что $g_1 f_1 + \dots + g_k f_k = 1$.

Определим подпространства $U_1, \dots, U_k$ в V^L формулой

$$U_i = \{v \in V^L\colon\ Sv = a_i v\}$$

и покажем, что V есть прямая сумма этих подпространств (отсюда будет следовать, согласно (Д.4.1), что S полупросто). Прежде всего, для $v \in V^L$ имеем

$$v = g_1(S) f_1(S) v + \dots + g_k(S) f_k(S) v.$$

Но $f_i(S)v \in U_i$, поскольку

$$(S - a_i) f_i(S) v = f(S) v = 0 \cdot v = 0.$$

Тот факт, что V есть прямая сумма U_i, следует теперь из линейной независимости собственных векторов с попарно различными собственными числами. $\square$

Упражнение. Пусть поле P совершенно. Показать, что линейное преобразование $S\colon V \to V$ полупросто тогда и только тогда, когда $(m_S, m'_S) = 1$.

5. Разложение Жордана

Пусть V — конечномерное векторное пространство над P. Линейное преобразование $N\colon V \to V$ называется *нильпотентным*, если существует натуральное число $e \geqslant 1$, такое что $N^e = 0$.

(Д.5.1) *Если N нильпотентно и полупросто, то $N = 0$.*

Доказательство. Пусть e — наименьшее натуральное число, для которого $N^e = 0$. Если $e = 1$, то все доказано. В противном случае $e \geqslant 2$ и $N^{e-1} \neq 0$, поэтому существует вектор $v_0 \in V$, для которого $N^{e-1} v_0 \neq 0$. Положим

$$W = \{v \in V\colon\ Nv = 0\}.$$

Как мы только что видели, $N^{e-1}v_0 \in W$, так что $W \neq 0$. Поскольку N полупросто, существует N-инвариантное подпространство W^1 в V, такое что $V = W \oplus W^1$. Далее, так как $e \geqslant 2$, то $W \subsetneqq V$ и $W^1 \neq \{0\}$. Точно такое же рассуждение, как и выше, показывает, что существует ненулевой вектор $v_1 \in W^1$, для которого $Nv_1 = 0$. Значит, $v_1 \in W \cap W^1$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

(Д.5.2) *Пусть P — совершенное поле, V — конечномерное векторное пространство над P и T: $V \to V$ — линейное преобразование. Существуют такие линейные преобразования S и N пространства V, что*

1) $T = S + N$;
2) $SN = NS$;
3) *S полупросто, а N нильпотентно;*
4) *S и N — многочлены от T.*

Пара (S, N), удовлетворяющая этим условиям, единственна.

Доказательство. Точно так же, как и при доказательстве утверждения (Д.4.2), можно найти многочлен $f \in P[x]$, для которого $(f, f') = 1$ и $f(T)^e = 0$. Пусть h и h_1 — такие многочлены из $P[x]$, что $f'h + fh_1 = 1$. Тогда $f'h \equiv 1 \pmod f$.

Используя эти многочлены, определим гомоморфизм α: $P[x] \to P[x]$ формулами $\alpha(x) = x - f(x)h(x)$ и $\alpha(p(x)) = p(\alpha(x))$ в общем случае. При помощи формулы Тейлора получаем

$$\begin{aligned}\alpha(f) = f(x - f(x)h(x)) &\equiv f(x) - f'(x)f(x)h(x) \pmod{f^2h^2}\\ &\equiv f(x)(1 - f'(x)h(x)) \pmod{f^2h^2}\\ &\equiv f(x)f(x)h_1(x) \pmod{f^2h^2} \equiv 0 \pmod{f^2}.\end{aligned}$$

По индукции легко доказывается, что

$$(*)\qquad \alpha^m(f) \equiv 0 \left(\bmod f^{2^m}\right).$$

Пусть m — натуральное число, выбранное так, что $2^m \geqslant e$. Из $(*)$ следует, что $\alpha^m(f) \equiv 0 \left(\bmod f^e\right)$. Определим линейное преобразование S формулой

$$S = \alpha^m(x)(T).$$

Тогда

$$f(S) = f(\alpha^m(x)(T)) = (\alpha^m f)(x)(T) = 0,$$

поскольку $\alpha^m f$ делится на f^e и $f(T)^e = 0$. Линейное преобразование S является многочленом от T по построению и полупросто в силу (Д.4.2).

Пусть $N = T - S$. Заметим, что

$$\alpha(x) = x - f(x)\,h(x) \equiv x \pmod f$$

и потому

$$\alpha^k(x) = x \pmod f.$$

Следовательно,

$$N^e = (T - S)^e = \left(x - \alpha^m(x)\right)^e T = 0,$$

поскольку $x - \alpha^m(x)$ делится на f и $f(T)^e = 0$. Таким образом, оператор N нильпотентен, и очевидно, что он является многочленом от T.

Наконец, допустим, что $T = S + N = S^1 + N^1$, где операторы S^1 и N^1 суть многочлены от T, причем S^1 полупрост, а N^1 нильпотентен. Оператор S^1 коммутирует с S, ибо оба эти оператора — многочлены от T. Следовательно, оператор $S - S^1$ полупрост, в силу (Д.4.1). По той же причине N коммутирует с N^1. Если $N_e = 0$ и $(N^1)^{e^1} = 0$, то $(N - N^1)^{e+e^1+1} = 0$. Поэтому $S - S^1 = N^1 - N$, так что оператор $S - S^1$ полупрост и нильпотентен. Согласно (Д.5.1), $S = S^1$. Следовательно, $N = N^1$. ▯

6. Теорема Жордана—Гёльдера

Пусть (V, Σ) — пространство с операторами. Последовательность Σ-инвариантных подпространств

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_r = V$$

называется *Σ-рядом* в V. Про такой ряд говорят, что он имеет *длину r*.

Σ-ряд

$$\{0\} = V_0 \subset \ldots \subset V_s = V$$

называется *уплотнением* ряда

$$\{0\} = W_0 \subset \ldots \subset W_r = V,$$

если каждое подпространство W_i совпадает с одним из V_j.

Пусть

$$\{0\} = W_0 \subset \ldots \subset W_r = V$$

— некоторый Σ-ряд в V. Поскольку каждое W_i Σ-инвариантно, имеется естественное действие Σ на W_i/W_{i-1}. Пространство W_i/W_{i-1} вместе с этим действием множества Σ есть пространство с операторами, обозначаемое через $(W_i/W_{i-1}, \Sigma)$ и называемое *фактором* данного ряда.

Наконец, ряд

$$\{0\} = W_0 \subset \ldots \subset W_r = V$$

называется *композиционным* Σ-*рядом* в V, если каждый фактор W_i/W_{i-1} является ненулевым и неприводимым.

(Д.6.1) *Пусть* W_1, W_2, V_1 *и* V_2 *суть* Σ-*инвариантные подпространства в* V, *такие что* $W_2 \subset W_1$ *и* $V_2 \subset V_1$. *Тогда*

$$(W_2 + (W_1 \cap V_1))/(W_2 + (W_1 \cap V_2)) \cong (V_2 + (V_1 \cap W_1))/(V_2 + (V_1 \cap W_2))$$

как Σ-модули.

Доказательство. Каноническое отображение

$$(W_1 \cap V_1) \to (W_2 + (W_1 \cap V_1))/(W_2 + (W_1 \cap V_2))$$

сюръективно и имеет ядро

$$K_1 = (W_1 \cap V_1) \cap (W_2 + (W_1 \cap V_2)).$$

Аналогично каноническое отображение

$$(W_1 \cap V_1) \to (V_2 + (V_1 \cap W_1))/(V_2 + (V_1 \cap W_2))$$

есть сюръективное отображение с ядром

$$K_2 = (W_1 \cap V_1) \cap (V_2 + (V_1 \cap W_2)).$$

Нам достаточно показать, что $K_1 = K_2$. Пусть $w \in K_1$, скажем

$$w = w_1 + w_2,$$

где $w \in W_1 \cap V_1$, $w_1 \in W_1 \cap V_2$ и $w_2 \in W_2$. Тогда $w - w_1 \in V_1$ и потому $w - w_1 = w_2 \in V_1 \cap V_2$. Следовательно, $w \in K_2$. Аналогично доказывается, что $K_2 \subset K_1$. $\square$

(Д.6.2) (Уточнение теоремы О. Шрайера) *Любые два* Σ-*ряда в* (V, Σ) *обладают уплотнениями равной длины, такими что факторы этих уплотнений попарно изоморфны.*

Доказательство. Пусть

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_r = V$$

и

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_s = V$$

— два Σ-ряда в (V, Σ). Положим

$$W_{ij} = W_{i-1} + (W_i \cap V_j)$$

и

$$V_{ji} = V_{j-1} + (V_j \cap W_i).$$

Тогда

$$W_{is} = W_{i-1} + (W_i \cap V_s) = W_{i-1} + (W_i \cap V) = W_i$$

и

$$W_{i0} = W_{i-1} + (W_i \cap \{0\}) = W_{i-1}.$$

Таким образом, мы имеем последовательность Σ-инвариантных подпространств

$$W_{i-1} = W_{i0} \subset \ldots \subset W_{is} = W_i.$$

Аналогично имеем

$$V_{j-1} = V_{j0} \subset V_{j1} \subset \ldots \subset V_{jr} = V_j.$$

Включение этих членов в исходные последовательности дает два уплотнения длины rs, и

$$W_{ij}/W_{ij-1} \simeq V_{ji}/V_{ji-1}$$

в силу (Д.6.1). $\square$

(Д.6.3) (Теорема Жордана—Гёльдера) *Пусть* (V, Σ) — *пространство с операторами. Любые два композиционных* Σ*-ряда в* V *имеют одинаковую длину и попарно изоморфные факторы.*

ЛИТЕРАТУРА[1]

Помета „[К гл. n]" после описания работы указывает на главу настоящей книги, к которой относится эта работа.

Бёрнер X. (H. Boerner) Representations of groups, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963. [Бёрнер] [К гл. 7]

Борель А. (A. Borel) Линейные алгебраические группы. — М.: Мир, 1972 (1969). [К гл. 6]

Вейль Г. (H. Weyl) Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfachen Gruppen, I—III, Math., 23, 24 (1924—25). [К гл. 7]

Вейль Г. (H. Weyl) The structure and representation of continuous groups, Lecture Note (1934—35). [К гл. 7]

Гантмахер Ф. Р. Канонические представления автоморфизмов комплексных групп Ли. — Мат. сборник, 1939, 5, с. 101—146.

Гантмахер Ф. Р. О классификации вещественных простых групп Ли. — Мат. сборник, 1939, 5, с. 217—249. [К гл. 8]

Гуревич В., Волмэн Г. (W. Hurewicz, H. Wallman) Теория размерности. — М.: ИЛ, 1948 (1941). [К гл. 6, 7]

Джекобсон Н. (N. Jacobson) Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964 (1962). [Джекобсон]

Дынкин Е. Б. Классификация простых групп Ли. — Мат. сборник, 1946, 18 (60), с. 347—352. [К гл. 2]

Дынкин Е. Б. Структура полупростых алгебр Ли. — УМН, 1947, 2:4 (20), с. 59—127. [К гл. 2]

Ивахори Н. (N. Iwahori) Theory of Lie groups, Iwanami, Tokyo, 1957 (на японском)

Ивахори Н. (N. Iwahori) On real irreducible representations of Lie algebras, Nagoya Math. J., **14** (1959), 59—83. [К гл. 8]

Ивахори Н., Мацумото X. (N. Iwahori, H. Matsumoto) On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, Institut Des Hautes Études Scientifiques Publication Mathématiques, No. 25 (1965), 237—280. [К гл. 5]

Картан Э. (E. Cartan) Oeuvres complètes, Partie I, Vol. 1 et 2 (1952).

Мацусима Я. (Y. Matsushima) Theory of Lie rings, Kyoritsu, Tokyo, 1956 (на японском).

Мураками С. (S. Murakami) On the automorphisms of a real semisimple Lie algebra, Journ. Math. Soc. Japan, **4** (1952), 291—307. [К гл. 8]

Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — 3-е изд. — М.: Наука, 1973.

Самельсон X. (H. Samelson) Notes on Lie algebras, Van Nostrand, New York, 1969.

Сатакэ И. (I. Satake) On a theorem of E. Cartan, Journ. Math. Soc. Japan, 2 (1951), 284—305. [К гл. 7]

Титс Ж. (J. Tits) Tabellen zu der einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Lecture Notes in Mathematics, **40**, Springer-Verlag, 1967.

---

[1] Те работы, на которые имеются ссылки в тексте, отмечены здесь фамилией автора в квадратных скобках (см. предисловие).

Для переводных книг в круглых скобках указан год выхода оригинального издания. — *Прим. перев.*

Фройденталь Х. (H. Freudenthal) Zur Berechnung der Charactere der halb-einfachen Lieschen Gruppen, I, II, Indagatioues Math., **16** (1954), 369—376, 487—491. [К гл. 7]

Хариш-Чандра (Harish-Chandra) On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), 28—99. [К гл. 7]

Хелгасон С. (S. Helgason) Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964 (1962). [Хелгасон]

Хохшильд Г. (G. Hochschild) Representation theory of Lie algebras, University of Chicago, Chicago, 1959. [К гл. 7]

Хохшильд Г. (G. Hochschild) The structure of Lie groups, Holden-Day, San Francisco, 1965.

Шевалле К. (С. Chevalley) Теория групп Ли. В 3 томах. — М.: ИЛ, т. 1, 1948 (1944) [Шевалле]; т. 2, 1958 (1951); т. 3, 1958 (1955).

Шевалле К., Эйленберг С. (С. Chevalley, S. Eilenberg) Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1943), 85—124. [К гл. 3]

Семинар «Софус Ли». Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. — М.: ИЛ, 1962 (1955).

ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

М. ГОТО, Ф. ГРОССХАНС · ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ